HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Valtteri Savolainen

Työn nimi — Arbetets titel — Title
CAP-malli Hilbertin avaruuksissa

Oppiaine — Läroämne — Subject
Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Lokakuu 2019	49 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tässä työssä esitellään klassinen matemaattisen rahoitusteorian aihe, Capital Asset Pricing-malli. Mallista on useita versiota, tässä työssä käsitellään Hilbertin avaruuksiin perustuvaa versiota. Yleisesti, erityisesti taloustieteen puolella, CAP-mallilla tarkoitetaan arvopapereiden hinnoittelumallia. Tässä työssä se kuitenkin määritellään tasapainotilaisten sijoituskohteiden tuottojen ominaisuutena.

Hilbertin avaruudet ovat täydellisiä normiavaruuksia, jotka on varustettu sisätulolla. Esitellään Hilbertin avaruudet ja muita funktionaalianalyysin keskeisimpiä käsitteitä, kuten ortogonaalisuus ja Riesz-Frechetin teoreema, jotta CAP-mallin rakentaminen on mahdollista. Lisäksi esitellään arvopaperimarkkinat, sekä niiden toimijat. Tärkeimmät käsitteet ovat arvopapereiden tuotot ja hinnat, sekä toimijoiden kulutus ja utiliteetti.

Termiä Capital Asset Pricing-malli käytetään silloin, kun markkinatuotto on odotusarvorintaman tuotto. Tällöin jokaiselle sijoituskohteelle voidaan johtaa arvopaperimarkkinasuoran yhtälö, joka on beta-hinnoittelun erikoistapaus. CAP-mallissa tuottoja mitataan odotusarvon avulla ja riskin mittarina toimii varianssi. Cap-mallin voimassaolo markkinoilla ei ole itsestäänselvyys ja liittyy läheisesti toimijoiden preferensseihin, sekä arvopapereiden voittojen jakaumaan. Lopuksi esitellään faktorimalli, joka on hyvin samankaltainen CAP-mallin kanssa.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
CAP-malli, Hilbertin avaruus, Utiliteettiteoria, Faktorimalli, Soveltava matematiikka

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

CAP-malli Hilbertin avaruuksissa

Valtteri Savolainen
Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Pro Gradu-tutkielma

13. lokakuuta 2019

Sisältö

1 Johdanto

Tämä työ käsittelee klassista matemaattisen rahoitusteorian aihetta, Capital Asset Pricing-mallia. Mallista on useita versiota, tässä esitellään kaksi niistä. Hilbertin avaruudet ovat keskeisessä asemassa CAP-mallia, lyhyesti, johdettaessa. Hilbertin avaruudet ovat täydellisiä normiavaruuksia, jotka on varustettu sisätulolla. Perinteisesti CAP-mallilla tarkoitetaan arvopapereiden hinnoittelumallia. Karakterisoidaan se tässä työssä kuitenkin tasapainotilaisten sijoituskohteiden tuottojen ominaisuutena. Riskin mittarina toimii varianssi tai volatiliteetti. Päälähteenä on käytetty Stephen F. LeRoyn ja Jan Wernerin kirjaa Principles of Financial Economics [1]. Muina tärkeinä lähteinä mainittakoon kaksi luentomonistetta, Harri Nyrhisen Sijoitustoiminnan matematiikka [2] ja Kari Astalan luentomoniste Funktionaalianalyysin peruskurssi [3].

Käytetään termiä Capital Asset Pricing Malli silloin, kun markkinatuotto sijaitsee kahden Rieszin ytimen virittimällä tasolla. Tämän tason tuotot ovat sellaisia, joilla tuottojen varianssi minimoituu suhteessa hintaan ja tuottoon. Nämä ytimet määritellään Hilbertin avaruuksien teoreeman Riesz-Frechet avulla.

Määritellään kuitenkin ensimmäisenä luvussa 2 arvopaperimarkkinat, joiden piirissä työskennellään. Keskeisiä käsitteitä ovat voitot, tuotot sekä toimijat salkkuineen ja kulutuksineen. Sivutaan näiden lisäksi arbitraasihinnoittelua ja utiliteettiteoriaa.

Luvussa 3 käydään läpi funktionaalianalyysin peruskäsitteistöä. Tässä työssä keskitytään lähinnä CAP-mallin kannalta oleellisiin määritelmiin ja konsepteihin. Luvussa määritellään normi, sisätulo ja täydellisyys, joiden avulla rakennetaan Hilbertin avaruudet. Tämän jälkeen puhutaan ortogonaalisuudesta ja esitellään luvun päätulokset. Näitä ovat projektioteoreema, Riesz-Frechet ja Rieszin ytimet. Topologian ja mittateorian tuntemuksesta on apua tätä lukua lukiessa.

Sijoituskohteiden voittoja, tuottoja ja riskiä analysoidaan luvussa 4, käyttäen niiden odotusarvoja ja varianssia. Yksinkertaistettuna tämä analyysi tehdään luvun 2 käsitteistölle, käyttäen luvun 3 tarjoamia työkaluja. Tärkeimmät tuotokset ovat rintamatuotto ja beta-hinnoittelu.

Kulutukseen perustuvaa arvopaperien hinnoittelua käsitellään luvussa 5. Siinä esitellään kulutukseen perustuvan arvopaperihinnoittelun yhtälö, Sharpen suhdeluku ja ensimmäinen versio CAP-mallista. Sharpen suhdeluku suhteuttaa sijoituskohteen riskipreemion sen volatiliteettiin ja tarjoaa siis mahdollisuuden tarkastella riskillä oikaistuja tuottoja.

Luvussa 6 päästään tämän työn päätulokseen, kun CAP-mallin oletuksia kevennetään edellisestä kappaleesta. Luvussa spesifioidaan tarkasti mallin vaatimukset arvopaperimarkkinoille, toimijoille ja tuotoille odotusarvoanalyysin avulla. Tämän lisäksi määritellään arvopaperimarkkinasuoran yhtälö. Sen mukaan markkinatuoton riskipreemion ja beta-kertoimen välinen suhde on lineaarinen.

Faktorihinnoittelu esitellään luvussa 7. Siinä käydään läpi mitä ovat faktorit, sekä niillä hinnoitteleminen ja mahdolliset hinnoitteluvirheet. Tässä yhteydessä todistetaan arvopaperimarkkinasuoraa vastaava tulos, jossa markkinatuotto korvataan faktorilla. Tällöin odotetun tuoton ja arvopaperin faktoririskin välille muodostuu lineaarinen suhde. Faktorihinnoittelu omaa siis CAP-mallin kanssa samankaltaisia ominaisuuksia. Sen soveltamista voi pitää tulosten kannalta mielekkäämpänä, mutta se on myös raskaampi soveltaa. Viimeisenä, keskeisessä esimerkissä esitellään faktoristruktuuria simuloimalla.

Viimeiseksi luvussa 8 käydään tämän työn mallien, erityisesti CAP-mallin ja Faktorihinnoittelun, käytännön soveltamista ja niiden ongelmia läpi.

2 Arvopaperimarkkinoista

Esitellään tässä kappaleessa arvopaperimarkkinat, joiden piirissä työssä tullaan työskentelemään. Yksinkertaisuuden vuoksi keskitytään yhden periodin malliin. Hetkellä 0 on tasan yksi deterministinen tila, joka on kaikille markkinoilla toimiville toimijoille tuttu. Hetkellä 1 arvopaperimarkkinat saavat satunnaisesti tilan äärellisestä määrästä vaihtoehtoja.

Arvopaperien hinnat tullaan yhdistämään niiden tuottoihin ja korvattavissa oleviin hintoihin ajanhetkellä 0 ja mahdollisissa eri tiloissa hetkellä 1. Tasapainotilassa nämä yhteydet pätevät kaikille toimijoille. Kulutuspohjainen hinnoittelu saadaan tästä relaatiosta, kunhan markkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot ovat derivoituvia ja niillä on odotusarvopohjainen esitys.

Useat tulokset yleistyvät usean periodin malliin luonnollisesti. Laajemmista arvopaperimarkkinoista voi lukea esimerkiksi Harri Nyrhisen luentomonisteesta [2] kappaleessa 5.2.

Määritelmä 2.1 (Voitto)**.** *Sijoituskohteeseen j liittyy oleellisesti sen voitto $x_j \in \mathbb{R}^S$. Käytetään seuraavaa merkintää, missä x_{js} edustaa sitä voittoa, jonka arvopaperin haltija saa hetkellä 1 tilassa $s \in S$, ja $x_j = [x_{j1}, ..., x_{jS}]$.*

Määritelmässä joukko S on äärellinen ja edustaa siis tila-avaruutta. Voiton tulkitaan olevan sijoituskohteen tuottama arvo, eli siitä syntyneet kassavirrat aikavälillä $[0, 1]$, käytännössä hetken 1 hinnasta vähennetään hetken 0 hinta. Tämä riippuu arvopaperimarkkinoiden tilasta hetkellä 1 ja voi olla positiivinen, nolla tai jopa negatiivinen, joidenkin derivatiivien tapauksessa. Kun puhutaan voittomatriisista, siinä on yhdistetty arvopaperimarkkinoiden N arvopaperin voittovektorit yhdeksi matriisiksi X. Matriisissa jokaisella rivillä on yhden sijoituskohteen mahdolliset voitot eri tiloissa. Merkitään arvopaperin j hintaa hetkellä t termillä $p_j(t)$ ja näistä muodostuvaa vektoria $p(t) = [p_1(t), ..., p_N(t)]$.

Olkoon markkinoilla äärellinen määrä toimijoita, jotka pyrkivät optimoimaan oman sijoitusstrategiansa. Merkitään toimijoiden joukkoa $\mathcal{I}$. Toimijan $i \in \mathcal{I}$ osallistumista markkinoille kuvataan tämän salkun avulla.

Määritelmä 2.2 (Toimijan salkku)**.** *Olkoon arvopaperimarkkinoilla N kappaletta sijoituskohteita. Toimija i voi hankkia arvopaperimarkkinoilta itselleen salkun*

$$\theta^i = (\theta_1^i, ..., \theta_N^i).$$

Tässä θ_n^i kuvaa arvopaperin n lukumäärää toimijan i salkussa.

Salkusta käytetään yleisesti myös nimitystä portfolio. Negatiiviset lukumäärät portfoliossa tulkitaan shortatuiksi positioiksi, puhutaan myös lyhyeksi myymisestä. Tämän voi tulkita siten, että toimija lainaa arvopaperin hetkellä 0 ja myy sen. Hetkellä 1 hän ostaa sen takaisin ja palauttaa omistajalleen. Salkun hankkimisesta hetkellä t toimija i joutuu maksamaan hinnan

$$p(t)\theta^i = \sum_{n=1}^{N} p_n(t)\theta_n^i, \tag{2.1}$$

missä $p(t)$ on arvopaperien hintavektori hetkellä t ja $p_n(t)$ yksi tämän vektorin komponenteista. Toimijan i salkun voitto on siis $\theta^i X$. Kun puhumme myöhemmin rintamavoitoista kohdassa 4.1, ne ovat usein salkkujen voittoja. Hyvin yksinkertaisilla markkinoilla yksittäinen sijoituskohde voi olla itsessään määritelmän 4.1 rintamavoitto.

Määrätään seuraavaksi mahdolliset voitot arvopaperimarkkinoiden muodossa.

Määritelmä 2.3 (Arvopaperimarkkinat)**.** *Olkoon arvopaperimarkkinoilla $\mathcal{M}$ sijoituskohteita N kappaletta. Nämä muodostavat arvopaperiavaruuden voittojen kanssa, tarkemmin*

$$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{R}^S : z = \theta X \ \ \textit{jollakin}\ \theta \in \mathbb{R}^N\} \tag{2.2}$$

Arvopaperimarkkinat ovat siis aliavaruus $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^S$, jonka virittää sijoituskohteiden voitot. Huomion arvoista on, että emme määrittele arvopaperimarkkinoita mahdollisina sijoituskohteina vaan mielivaltaisina voittoina, jotka syntyvät sijoituskohteista syntyvien voittojen kombinaatioista. Toisin sanoen, joukko $\mathcal{M}$ pitää sisällään markkinoilla saavutettavissa olevat voittovektorit. Erityisesti, tapauksessa $\mathcal{M} = \mathbb{R}^S$ markkinat ovat täydelliset.

Eri sijoituskohteiden vertailu ei ole mielekästä pelkästään voittojen avulla, sillä oleellista on myös hinta mitä näistä joudutaan maksamaan. Yhdistetään seuraavaksi jokaiseen voittoon hinta, jolloin saadaan tuotto. Hinta ei voi olla nolla, että tuotto on hyvin määritelty. Tämän kanssa ei tule ongelmia, kun määrittelemme markkinat arbitraasivapaiksi määritelmän 2.10 mukaisesti.

Määritelmä 2.4 (Tuotto)**.** *Arvopaperin j tuotto on sen voitto jaettuna hinnalla $r_j = \frac{x_j}{p_j}$, missä p_j on arvopaperin j hinta.*

Tästä käytetään myös nimitystä tuottoaste. Toimeksiannoista aiheutuvien kulujen ajatellaan olevan merkityksettömän pieniä, jolloin ne eivät näy hinnoissa tai voitoissa.

Valtion velkakirjoja on perinteisesti pidetty riskittöminä tai ainakin lähes riskittöminä sijoituskohteina. Erityisesti, niistä saatavat tulevat kassavirrat ovat tiedossa. Valtioiden välillä on keskinäisiä eroja ja tämä näkyy luonnollisesti sijoitukselle saatavassa korossa. Esimerkiksi Saksan ja Sveitsin valtion velkakirjoja on erityisesti pidetty riskittöminä. Näiden luottotappioriskin, eli lainanottajan maksukyvyttömyysriskin, ajatellaan olevan merkityksettömän pieni. Tämä riskitön tuottokin on ainakin toivottavasti positiviinen, mikä ei välttämättä ole pitänyt paikkansa viime vuosina, ainakaan kehittyneillä markkinoilla.

Määritelmä 2.5 (Riskitön tuotto)**.** *Riskittömästä tuotosta puhuttaessa, tarkoitetaan tuottoa, jonka saa sijoituskohteelle, jolla ei ole riskiä. Toisin sanoen puhutaan sijoituskohteesta, jonka tuotto ei riipu hetken 1 tilasta s. Riskitöntä tuottoa merkitään termillä $\overline{r}$.*

Kaikki sijoituskohteet eivät kuitenkaan ole riskittömiä. Tällaisia ovat esimerkiksi osakkeet, reaaliomaisuus, osakkeisiin liittyvät johdannaiset ja riskilliset velkakirjat, kuten yrityslainat. Näistä syntyvät tulevat kassavirrat ovat epävarmoja ja siksi niiden on toivottavaa sisältää riskipreemio, tai siis parempi tuotto, verrattuna riskittömään tuottoon. Matemaattisesti ne on siis tulkittava satunnaismuuttujina.

Määritelmä 2.6 (Riskipreemio)**.** *Riskipreemio on se lisä odotustuottoon, joka on perusteltavissa riskistä aiheutuvan varianssin kantamisella. Satunnaisen sijoituskohteen j tuoton riskipreemio on*

$$r_{preemio} = \mathbb{E}(r_j) - \overline{r}, \tag{2.3}$$

missä termi $\mathbb{E}(r_j)$ on määritelmän 2.7 *odotustuotto.*

Esimerkiksi osakkeen omistajat saavat osansa yhtiön voitoista osinkojen muodossa. Yhtiön voittoihin ja sitä kautta maksamiin osinkoihin liittyy kuitenkin satunnaisuutta, kuten muuttuva kilpailutilanne ja talouden suhdanteet. Määritellään näiden tuottojen mittaamiseksi odotustuotto.

Määritelmä 2.7 (Odotustuotto)**.** *Sijoituskohteen j odotustuotto on*

$$\mathbb{E}(r_j) = \frac{1}{p_j} \sum_s x_{js} \pi_s, \tag{2.4}$$

missä π_s on sopiva todennäköisyysmitta.

Luonnollinen valinta todennäköisyysmitalle on sellainen mitta, joka kuvaa jokaisen tilan s sen mukaan, mikä on todennäköisyys saavuttaa kyseinen tila. Tämän kanssa hyvin läheinen konsepti on arvopaperimarkkinoiden hinnoittelija.

Määritelmä 2.8 (Hinnoittelija)**.** *Satunnaismuuttujaa* ϕ *kutsutaan hinnoittelijaksi tai deflaattoriksi, jos* $\mathbb{P}(\phi > 0) = 1$ *ja*

$$p_j(0) = \mathbb{E}\left(\phi p_j(1)\right) \tag{2.5}$$

kaikilla $j = 1, ..., N$*.*

Kappaleen muusta sisällöstä poiketen, esitellään seuraavaksi konsepti usean periodin markkinoilta. Tämän tarkoitus on antaa lukijalle jonkinlainen käsitys siitä, miten arvopaperin hinta syntyy ja mitä suuruusluokkaa se on. Siispä, eräs yksinkertainen tapa hinnoitella arvopapereita on diskontata sen tulevat kassavirrat nykyhetkeen.

Määritelmä 2.9 (Kassavirtojen diskonttaus)**.** *Olkoon* D_n *sijoituksesta hetkellä* n *syntyvä kassavirta. Tällöin sijoituskohteesta syntyvät tulevat kassavirrat diskontattuna nykyhetkeen ovat muotoa*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(D_n)}{(1+i_n)^n}, \tag{2.6}$$

missä i_n *on hetken* n *vuosikorko. Tämä nettonykyarvo muodostaa osakkeen nykyhinnan.*

Vastaavasti on mahdollista diskontata kassavirrat mielivaltaiselle ajanhetkelle t. Käytetty korko voi olla esimerkiksi toimijan tuottovaatimus tai riskittömästä sijoituskohteesta saatava tuotto mahdollisella riskipreemiolla. Korko valittiin hetkestä n riippuvaksi, koska vakiokorko ei välttämättä ole aina realistinen. Valtion velkakirjojen korkokäyrän hyödyntäminen yhdessä preemion kanssa on yksi vaihtoehto korkoa valittaessa.

Määritellään seuraavaksi arbitraasin käsite. Sen voi tulkita tarkoittavan mahdollisuutta hankkia riskittömästi mahdollisuus voittoihin, kun hetken 0 pääoma on nolla. Pääomalla tarkoitetaan markkinoille sijoitettavissa olevia varoja ja niitä käsitellään tarkemmin kappaleessa 2.1.

Määritelmä 2.10 (Arbitraasi)**.** *Markkinoilla on arbitraasimahdollisuus, jos on olemassa salkku* θ *siten, että*

$$\begin{aligned} &p(0)\theta \leq 0 \text{ ja} \\ &p(1)\theta \geq 0 \text{ m.v. ja } \mathbb{P}(p(1)\theta > 0) > 0. \end{aligned}$$

Markkinat ovat arbitraasivapaat, jollei niillä ole arbitraasimahdollisuutta.

Markkinoiden oletetaan usein olevan arbitraasivapaat. Vaihtoehtoisesti niiden toimijoiden voidaan tulkita hyödyntävän arbitraasimahdollisuudet nopeasti, jolloin arbitraasimahdollisuudet katoavat. Nykyään nämä kyseiset toimijat ovat usein kauppaa käyviä tietokoneita tai algoritmeja. Esitetään vielä arbitraasihinnoittelun 1. päälause, joka kertoo milloin markkinat ovat arbitraasivapaat.

Lause 2.11 (Arbitraasihinnoittelun 1. päälause)**.** *Edellä esitetty yhden periodin markkinamalli on arbitraasivapaa, jos ja vain jos on olemassa vähintään yksi hinnoittelija. Lisäksi hinnoittelija voidaan valita rajoitetuksi.*

Lauseen todistukseen voi tutustua Harri Nyrhisen luentomonisteen [2] kohdassa 5.1.

2.1 Utiliteettiteoriaa

Oletetaan, että toimija toimii markkinoilla varallisuudellensa saadun utiliteetin, eli hyödyn mukaan. Tämä hyöty esitetään kulutussuunnitelman muodossa. Kun salkun avulla määriteltiin toimijan osallistuminen markkinoille, nyt käydään läpi yhtä mahdollisuutta, miten toimija ohjaa tätä osallistumistaan. Tämä voi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että toimija on riskinkaihtaja ja hakee suhteellisen "turvallista"portfoliota sen sijaan, että maksimoisi sijoituksiensa tuoton odotusarvon. Kuvataan näitä toimijan preferenssejä utiliteettifunktion avulla. Utiliteettiteorian peruskäsitteitä määritellään tämän työn tarpeiden mukaan. Tarkemmin utiliteettiteoriaan voi tutustua esimerkiksi kirjan Princibles of Financial Economics [1] kappaleista yksi ja kahdeksan.

Määritelmä 2.12 (Toimijan kulutus)**.** *Toimijan i kulutus hetkellä 0 on tiedossa ja voidaan siis esittää skalaarilla c_0. Hetkellä 1 kulutus riippuu markkinoiden tilasta s ja esitetään vektorilla, jonka pituus on S, eli siis*

$$c_1^i = (c_{11}^i, ..., c_{1S}^i). \tag{2.7}$$

Yleisesti toimijoiden voidaan olettaa kuluttavan sekä hetkillä 0 ja 1, tai että kulutus on vähintäänkin ei-negatiivista. Yhdistettäessä toimijan i hetkien 0 ja 1 kulutukset c_0^i sekä c_{1s}^i, puhutaan kulutussuunnitelmasta. Merkitään tätä termillä (c_0^i, c_1^i). Kokonaiskulutuksella viitataan markkinoiden kaikkien toimijoiden kulutukseen. Käytännössä kulutuksen ottaminen mukaan sijoitusstrategiaan on perusteltua esimerkiksi toimijalle, joka pyrkii kustantamaan elämisen sijoituksistaan syntyvien kassavirtojen avulla. Myös vakuutusyhtiöt pyrkivät sijoittamaan tavalla, jossa sijoituksista saatavat kassavirrat ovat rakenteeltaan lähellä sen myöntämien vakuutusten kassavirtoja, ainakin odotusarvomielessä.

Toimija mittaa kulutussuunnitelmansa tarjoamaa hyötyä utiliteettifunktion avulla ja pyrkii siis toimiessaan utiliteettiteorian pohjalta maksimoimaan tämän hyödyn.

Määritelmä 2.13 (Toimijan utiliteettifunktio)**.** *Oletetaan, että toimijan i utiliteettifunktio $u^i : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja että toimijan i kulutus on aina positiivista. Tällöin utiliteettifunktion mittaama kulutussuunnitelman (c_0^i, c_1^i) tarjoama utiliteetti on*

$$u^i(c_0^i, c_1^i). \tag{2.8}$$

Tarkastellaan seuraavaksi utiliteettifunktion ominaisuuksia eri tilanteissa. Utiliteettifunktio u on kasvava hetkellä 0, jos $u(c_0^{'}, c_1) \geq u(c_0, c_1)$ silloin kun $c_0^{'} \geq c_0$ jokaisella c_1. Vastaavasti se on kasvava hetkellä 1, jos $u(c_0, c_1^{'}) \geq u(c_0, c_1)$ silloin kun $c_1^{'} \geq c_1$ jokaisella c_0 ja s. Kasvavuus on aitoa silloin, kun yhtälöiden epäyhtälöt ovat aitoja. Toimijan merkitsevä indeksi pudotetaan välillä pois selkeyden vuoksi.

Määritelmä 2.14 (Utiliteettifunktion aikariippumattomuus)**.** *Utiliteettifunktioita pidetään aikariippumattomina, mikäli kulutussuunnitelman $\{c_0, c_1\}$ utiliteetti $u(c_0, c_1)$ voidaan kirjoittaa muodossa*

$$u(c_0, c_1) = u_0(c_0) + u_1(c_1), \tag{2.9}$$

missä funktio u on jaettu komponenttien avulla kahdeksi funktioksi yhtälön oikealla puolella. Nämä funktiot ovat siis muotoa $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $u_1 : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}$.

Tärkeä utiliteettifunktioden tyyppi on von Neumann-Morgernsternin utiliteettifunktio. Kyseiset utiliteettifunktiot karakterisoi niiden riippumattomuus tila-avaruutensa tilasta hetkellä 1.

Määritelmä 2.15 (von Neumann-Morgernstern utiliteettifunktio)**.** *Olkoon utiliteettifunktiolla $u : \mathbb{R}^{S+1} \to \mathbb{R}$ komponenttipohjainen esitys. Toisin sanoen se voidaan esittää käyttäen komponenttifunktioita $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $u_{1s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joista jokainen vastaa yhtä tila-avaruuden hetken 1 tilaa. Erityisesti, u on von Neumann-Morgernstern utiliteettifunktio, mikäli sen komponentit u_{1s} voidaan valita samaksi funktioksi $u_{nm} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaikissa tiloissa ja kunhan sopivat todennäköisyysmitat π_s ovat olemassa. Toisin sanoen*

$$u_1(c_1, ..., c_S) \geq u_1(c_1^{'}, ..., c_S^{'}) \tag{2.10}$$

jos ja vain jos

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_s u_{nm}(c_s) \geq \sum_{s=1}^{S} \pi_s u_{nm}(c_s^{'}) \tag{2.11}$$

jollekin todennäköisyysmitalle π ja utiliteettifunktiolle $u_{nm} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Merkitään toimijan i pääomaa hetkellä 0 termillä w_0^i ja hetkellä 1 vastaavasti w_1^i. Hetken 1 toimijan i pääoma w_1^i koostuu toimijan salkun θ^i tuottamista voitoista hetkellä 1. Se siis riippuu markkinoiden saavuttamasta tilasta s ja siihen liittyy yleensä satunnaisuutta. Pääoma tulkitaan hetkellä 1 siis vektoriksi, missä vektoreiden komponentteina on toimijan i pääoma tila-avaruuden tiloissa s, eli $w_1^i = \left[w_{11}^i, ..., w_{1S}^i\right]$.

Seuraavassa esimerkissä kootaan yhteen tämän kappaleen käsitteistöä.

Esimerkki 2.0.1. *Olkoon markkinoiden tila-avaruus S kolmitilainen, joista ensimmäisen todennäköisyys on $\frac{1}{2}$ ja jälkimmäisen kahden molempien $\frac{1}{4}$. Toimijan pääoma hetkellä nolla on $w_0 = 1$ ja hetkellä 1 pääomavektori on muotoa $w_1 = \{1, 1, 2\}$.*

Toimija mittaa utiliteettiaan funktiolla

$$\mathbb{E}\left[u(c_0, c_1)\right] = \ln(c_0) + \frac{11}{10} * (\frac{1}{2}\ln c_{11} + \frac{1}{4}\ln c_{12} + \frac{1}{4}\ln c_{13}),$$

missä $(c_0, \{c_{11}, c_{12}, c_{13}\})$ *on toimijan kulutussuunnitelma. Toimijan voi myös tulkita arvostavan hetken 1 kulutustaan korkeammalle kuin hetken 0, painokertoimen* $\frac{11}{10}$ *perusteella. Markkinoilla on kolme arvopaperia, joista ensimmäinen on riskitön, eli* $x_1 = \{1, 1, 1\}$*. Kahden muun voitot ovat muotoa* $x_2 = \{0, 1, 1\}$ *ja* $x_3 = \{1, 1, 0\}$ *markkinoiden tilan mukaan hetkellä yksi.*

Arvopaperimarkkinoilla vaaditaan, että jokainen toimija i täyttää budjettivaatimuksen, eli että tämän sijoitukset ovat hinnaltaan korkeintaan yhtä suuret kuin tämän pääoma.

Määritelmä 2.16 (Budjettivaatimus)**.** *Arvopaperimarkkinoiden budjettivaatimus tarkoittaa sitä, että seuraava epäyhtälö toteutuu*

$$\theta_0 p(0) \leq w_0^i. \tag{2.12}$$

Vastaava ehto markkinoiden kokonaispääomalle $\overline{w}$, tai siis kaikkien toimijoiden ylitse summatulle pääomalle, määritellään markkinoiden tasapainotilan yhteydessä määritelmässä 2.19.

Määritellään seuraavaksi toimijan kulutuksen utiliteetin maksimoimiseen ja portfolion valintaan liittyvä ongelma. Hetkellä 0 toimijat kuluttavat hetken 0 pääomansa vähennettynä arvopapereiden ostoon käytetyt varat, kuten on rationaalista. Vastaavasti hetkellä 1 toimijat kuluttavat hetken 1 pääomansa ja arvopapereidensa tuottamat voitot.

Määritelmä 2.17 (Kulutusongelma)**.** *Toimijan i kulutus ja portfoliovalintaongelma on*

$$\max_{c_0, c_1, \theta_0} u^i(c_0, c_1) \tag{2.13}$$

vaatimuksilla

$$c_0 \leq w_0^i - \theta_0 p(0) \text{ ja} \tag{2.14}$$

$$c_1 \leq w_1^i + \theta_0 X. \tag{2.15}$$

Lienee luonnollista vaatia myös, että kulutussuunnitelmat ovat ei-negatiivisia. Utiliteettiteorian mukaan toimija siis pyrkii maksimoimaan kaavan 2.13 odotusarvon. Tämä kulutusongelma on ratkaistavissa ensimmäisen kertaluvun ehdoilla, mikäli toimijan utiliteettifunktio on differentoituva.

Teoreema 2.1 (Ensimmäisen kertaluvun ehdot kulutusongelmalle)**.** *Olkoon toimijan i utiliteettifunktio* u^i *differentoituva. Oletetaan lisäksi, että kulutussuunnitelman* (c_0^i, c_1^i)

komponenteille pätee $c_0^i, c_1^i \geq 0$. Ensimmäisen kertaluvun ehdot kulutusongelman ratkaisuun ovat tällöin

$$\partial_0 u^i(c_0^i, c_1^i) - \lambda \leq 0, \quad (\partial_0 u^i(c_0^i, c_1^i) - \lambda)c_0 = 0 \tag{2.16}$$

$$\partial_s u^i(c_0^i, c_1^i) - \mu_s \leq 0, \quad (\partial_s u^i(c_0^i, c_1^i) - \mu_s)c_s = 0, \quad \textit{kaikilla } s \tag{2.17}$$

$$\lambda p(0) = X\mu, \tag{2.18}$$

missä λ ja $\mu = (\mu_1, ..., \mu_S)$ ovat positiivisia Lagrangen kertoimia.

Jos toimijan utiliteettifunktio on kvasikonkaavi, niin nämä ehdot kulutussuunnitelmalle ovat yhtäpitäviä sen kanssa, että kulutusongelma ratkeaa. Kulutusongelman ratkaisun yksityiskohtiin voi tutustua tarkemmin kirjan Princibles of Financial Economics [1] kappaleesta 1.5.

Oletetaan, että ratkaisu on optimointialueen sisällä tälle utiliteettifunktiolle. Tällöin ensimmäiset kaksi ehtoa kulutusongelmalle pätevät yhtälöinä ja kolmas ehto $\lambda p = X\mu$ saa muodon

$$p = X\frac{\partial_1 u^i}{\partial_0 u^i}. \tag{2.19}$$

Tyypillisesti tämä yhtälö voidaan kirjoittaa

$$p_j = \sum_s x_{js}\left(\frac{\partial_s u^i}{\partial_0 u^i}\right). \tag{2.20}$$

Yhtälön (2.20) mukaan arvopaperin j hinta on yhtä suuri kuin summa sen mahdollisten tilojen voittojen ylitse jokaisessa tilassa kerrottuna sen marginaalisella korvaavalla hinnalla kyseisessä tilassa ja hetken 0 kulutuksen välillä. Määritellään tämä marginaalinen korvaava hinta seuraavaksi.

Määritelmä 2.18 (Marginaalinen korvaava hinta). *Olkoon u toimijan utiliteettifunktio. Hetken 0 kulutuksen ja tilan s hetken 1 kulutuksen välinen marginaalinen korvaava hinta on $\partial_s u^i/\partial_0 u^i$.*

Koko arvopaperimarkkinat kattavan budjettivaatimusten tai clearing-ehtojen toteutuessa sopivilla arvopaperien hinnoilla, toimijoiden portfolioallokaatiolla ja kulutusongelman ratkaisevilla kulutussuunnitelmilla voidaan määritellä markkinoiden tasapainotila. Yhtälöt kohdissa (2.21) ja (2.22) muodostavat yhdessä mainitut clearing ehdot.

Määritelmä 2.19 (Tasapainotila). *Arvopaperimarkkinoiden tasapainotila koostuu arvopapereiden hintavektorista p, toimijoiden portfolioallokaatioista θ^i ja kulutussuunnitelmista $\{(c_0^i, c_1^i)\}$, jotka ovat ratkaisu toimijan kulutusongelmalle* 2.17 *hintavektorilla p, ja lisäksi markkinoilla toteutuu clearing ehdot*

$$\sum_i \theta^i = 0, \ \textit{ja} \tag{2.21}$$

$$\sum_i c_0^i \leq \overline{w}_0 = \sum_i w_0^i, \qquad \sum_i c_1^i \leq \overline{w}_1 = \sum_i w_1^i. \tag{2.22}$$

Yhtälön (2.21) voi tulkita tarkoittavan, että arvopapereita ei ole "ylimääräisiä" tarjolla tai niiden nettotarjonta on nolla. Tämä muotoilu tukee aiempia määritelmiä siitä, että toimijoiden pääomat on ilmaistu kulutussuunnitelmien muodossa. Kirjallisuudessa vastaavaa ehtoa näkee myös muodossa, jossa summa toimijoiden salkkujen ylitse vastaa kierrossa olevien arvopaperien määrää. Kohdan (2.22) yhtälöt pitävät huolen siitä, että toimijoiden kulutussuunnitelmat eivät summa tasolla ylitä kokonaispääomaa kummallakaan ajanhetkellä. Tasapainotilan mallin valinta mahdollistaa sen, että toimijoilla on arvopapereita alkuperäisenä pääomana ja niitä on markkinoilla tarjolla positiivinen määrä. Tällöin tasapainoinen portfolioallokaatio (2.21) tulkitaan markkinoiden nettokauppaisena allokaationa.

3 Funktionaalianalyysista

Rakennetaan tässä kappaleessa Hilbertin avaruudet ja käydään läpi niiden keskeisiä ominaisuuksia sovelluksen kannalta. Hilbertin avaruudet ovat täydellisiä sisätuloavaruuksia. Määritellään ensin tarvittavat ominaisuudet Hilbertin avaruuksille, itse Hilbertin avaruus ja viimeiseksi sovelluksen kannalta keskeiset ominaisuudet ja käsitteet. Näitä ovat esimerkiksi Riesz-Frechetin teoreema ja siihen liittyen Rieszin ytimet. Funktionaalianalyysin käsittely on tässä työssä pintapuolista ja kiinnostuneet saavat lisätietoa esimerkiksi Kari Astalan luentomonisteesta [3]. Kappaleessa esiintyvä skalaarikunta $\mathbb{K}$ on reaalinen, eli $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Useimmat tulokset pätevät myös kompleksisella skalaarikunnalla.

Määritelmä 3.1 (Normi)**.** *Olkoon E jokin $\mathbb{K}$-kertoiminen verktoriavaruus. Kuvaus $p : E \to \mathbb{R}_+$ on normi E:ssä, jos*

$$\begin{array}{ll} \textit{(N1)} & p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \textit{kaikilla } x, y \in E \\ \textit{(N2)} & p(ax) \leq ap(x) \quad \textit{kaikilla } x \in E \textit{ ja } a \in \mathbb{K} \\ \textit{(N3)} & p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0} \end{array}$$

Vektoriavaruutta, joka on varustettu normilla, kutsutaan normiavaruudeksi ja normia merkitään tavallisesti termillä $p(x) = ||x||$. Tässä työssä samalla merkinnällä usein kuitenkin tarkoitetaan erästä tiettyä normia, joka määritellään sisätulon avulla lauseen 3.7 yhteydessä. Normi on eräänlainen "etäisyyskäsite" vektoriavaruudessa. Lisäksi se toteuttaa esimerkiksi kolmioepäyhtälön, lauseen 3.6 Cauchy-Schwartzin-epäyhtälön, sekä määrää metrisen topologian käsitteitä. Metrisen topologian käsitteistä jonojen suppeneminen on tämän työn kannalta keskeisin ja se määrää edelleen funktionaalien jatkuvuuden avaruudessa E.

Määritellään seuraavaksi määritelmän 3.8 Hilbertin avaruudet karakterisoiva normi.

Määritelmä 3.2 (Sisätulo)**.** *Olkoon E verktoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$. Kuvaus $f : E \times E \to \mathbb{K}$ on sisätulo, jos*

- $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$
- $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$
- $f(y, x) = f(x, y)$
- $f(y, x) \geq 0 \;\; ja \;\; f(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0}$

kaikilla $x_1, x_2, x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Tällöin merkitään $x \cdot y = f(x, y)$.

Tällöin $\| \, x \, \| = \sqrt{x \cdot x}$ määrittelee erään vektoriavaruuden normin. Tämän todistus on lauseessa 3.7. Sisätulosta käytetään myös nimitystä skalaaritulo.

Funktionaalianalyysin kannalta tärkeä ryhmä jonoja tunnetaan nimellä Cauchy-jonot. Tällä tarkoitetaan jonoja, jonka termit ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan jonkin riittävän suuren indeksin jälkeen.

Määritelmä 3.3 (Cauchy-jono)**.** *Normiavaruuden $(E, \| \cdot \|)$ jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on Cauchy-jono, jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ vastaa sellainen luku $m_\epsilon \in \mathbb{N}$, että*

$$\| \, x_k - x_j \, \| < \epsilon$$

aina kun $k, j > m_\epsilon$.

Kolmioepäyhtälöä hyödyntämällä nähdään, että Cauchy-jonot ovat aina rajoitettuja. Ne eivät kuitenkaan aina suppene. Cauchy-jonojen suppeneminen johtaa koko funktionaalianalyysin kannalta olennaiseen käsitteeseen, joka on normiavaruuksien täydellisyys.

Määritelmä 3.4 (Täydellisyys)**.** *Normiavaruus $(E, \| \cdot \|)$ on täydellinen, jos avaruuden E jokainen Cauchyn jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee avaruudessa E.*

Täydellinen normiavaruus tunnetaan myös nimellä Banachin avaruus. Toinen tärkeä avaruuksien ryhmä on sisätuloavaruudet. Ne ovat vektoriavaruuksia, joihin tuodaan tavallaan lisärakennetta, varustamalla ne jollakin yksikäsitteisellä sisätulolla.

Määritelmä 3.5 (Sisätuloavaruus)**.** *Vektoriavaruus E on sisätuloavaruus, jos E on varustettu sisätulolla.*

Todistetaan seuraavaksi yleishyödyllinen epäyhtälö sisätuloavaruuksille.

Lause 3.6 (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö)**.** *Sisätuloavaruudessa E pätee*

$$| \, x \cdot y \, | \leq \| \, x \, \| \| \, y \, \| \qquad \textit{kaikilla } x, y \in E.$$

Todistus. Oletetaan, että $x, y \neq 0$, koska muuten todistus olisi selvä. Kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee

$$\begin{aligned} 0 \leq (x + \lambda y) \cdot (x + \lambda y) &= x \cdot x + \lambda x \cdot y \lambda x \cdot y + \lambda \lambda y \cdot y \\ &= \parallel x \parallel^2 + 2\lambda x \cdot y + \lambda^2 \parallel y \parallel^2 . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Valitsemalla $\lambda = -\frac{(x|y)}{\|y\|^2}$ edellisestä epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} 0 &\leq \parallel x \parallel^2 - \frac{2|x \cdot y|^2}{\parallel y \parallel^2} + \frac{|x \cdot y|^2}{\parallel y \parallel^4} \parallel y \parallel^2 \\ &= \parallel x \parallel^2 - \frac{|x \cdot y|^2}{\parallel y \parallel^2} \\ &\Leftrightarrow |x \cdot y| \leq \parallel x \parallel \parallel y \parallel . \end{aligned} \tag{3.2}$$

$\square$

Todistetaan Cauchy-Schwarzin epäyhtälön avulla, että aiemmin määritelty sisätulo $\parallel x \parallel = \sqrt{x \cdot x}$ on normi.

Lause 3.7 (Seuraus). *Kuvaus* $\parallel x \parallel = \sqrt{x \cdot x}$*, missä* $x \in E$*, on sisätuloavaruuden* E *normi.*

Todistus. Käydään normin ehdot (N1)-(N3) läpi. Ehto (N3) toteutuu, sillä $\parallel x \parallel = \sqrt{(x|x)} = 0$, jos ja vain jos $\overline{x} = 0$, koska $x \cdot x$ on sisätulo. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned} 0 \leq \parallel x + y \parallel^2 = (x + y) \cdot (x + y) &= \parallel x \parallel^2 + x \cdot y + y \cdot x + \parallel y \parallel^2 \\ &= \parallel x \parallel^2 + 2x \cdot y + \parallel y \parallel^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nyt edellisen ja Cauchy-Schwartzin epäyhtälön nojalla pätee

$$\begin{aligned} \parallel x + y \parallel^2 &= \parallel x \parallel^2 + 2x \cdot y + \parallel y \parallel^2 \\ &\leq \parallel x \parallel^2 + 2 \parallel x \parallel \parallel y \parallel + \parallel y \parallel^2 \\ &= (\parallel x \parallel + \parallel y \parallel)^2 . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ottamalla neliöjuuri puolittain ehto (N1) toteutuu. Ehto (N2) saadaan edelleen, kun $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\parallel \lambda x \parallel = \sqrt{\lambda x \cdot \lambda x} = \sqrt{\lambda \lambda x \cdot x} = \sqrt{\lambda^2 \parallel x \parallel^2} = |\lambda| \parallel x \parallel . \tag{3.5}$$

Kaikki kolme ehtoa pätevät, joten kyseessä on sisätuloavaruuden E normi.

$\square$

Yhdistämällä täydellisyys 3.4 ja sisätuloavaruudet 3.5 päästään Hilbertin avaruuksien käsitteeseen.

Määritelmä 3.8 (Hilbertin avaruus). *Täydellistä sisätuloavaruutta* $(E, \cdot)$ *kutsutaan Hilbertin avaruudeksi.*

Hilbertin avaruudet ovat rakenteeltaan lähellä euklidista avaruutta, omaavat sieltä tuttuja ominaisuuksia ja voivat olla ulottuvuuksiltaan rajattomia. Todetaan vielä lisäksi, että jokainen Hilbertin avaruuden aliavaruus varustettuna samalla sisätulolla on myös Hilbertin avaruus.

Esitellään tämän työn kannalta kaksi oleellista Hilbertin avaruutta. Toimijan kulutus 2.12 määriteltiin hetkellä 1 tilariippuvaiseksi. Nämä hetken 1 tilan s mukaiset kulutukset virittävät avaruuden $\mathbb{R}^S$. Kyseessä on itseasiassa Hilbertin avaruus kahdella eri sisätulolla. Ensimmäisen niistä, vieläpä Euklidisen, sisätulon määrää

$$x \cdot y = \sum_s x_s y_s \tag{3.6}$$

ja toisen sisätulon, odotusarvoon perustuvan, määrää

$$x \cdot y = \mathbb{E}(xy) = \sum_s \pi_s x_s y_s, \tag{3.7}$$

missä π on avaruuden S todennäköisyysmitta. Jälkimmäisen sisätulon määräämä normi on tarkemmin

$$||x|| = \sqrt{\mathbb{E}(x^2)} = \sqrt{\mathrm{var}(x) + (\mathbb{E}(x))^2}. \tag{3.8}$$

3.1 Ortogonaalisuudesta

Kohtisuoruus tai ortogonaalisuus on tärkeä käsite sisätuloavaruuksille. Vektoreiden ortogonaalisuus helpoittaa myöhemmin laskutoimitusten ratkaisua ja auttaa hajoittamaan avaruuksia pienemmiksi palasiksi. Erityisesti projektioteoreema on keskeisessä asemassa sovellettaessa funktionaalianalyysia tässä työssä. Aloitetaan ortogonaalisista vektoreista.

Määritelmä 3.9 (Ortogonaaliset vektorit). *Olkoon E vektoriavaruus ja $\{x_1, ..., x_n\} \in E$ kokoelma sen vektoreita. Vektorit x_1 ja x_2 ovat ortogonaaliset jos $(x_1 \mid x_2) = 0$. Vektorikokoelma muodostaa ortogonaalisen systeemin mikäli $(x_i \mid x_j) = 0$ aina kun $i \neq j$. Jos lisäksi $\| x_i \| = 1$ kaikilla i, niin systeemi on ortonormaali.*

Esitellään seuraavaksi Pythagoraan teoreema ortogonaalisille systeemeille.

Teoreema 3.1 (Pythagoras). *Jos $\{x_1, ..., x_n\}$ on ortogonaalinen systeemi Hilbertin avaruudessa E, niin*

$$\| \sum_{i=1}^n x_i \|^2 = \sum_{i=1}^n \| x_i \|^2$$

Teoreema on todistettavissa esimerkiksi induktiolla, kuten Kari Astalan luentomonisteen [3] kappaleessa 4.

Seuraava korollaari seuraa Pythagoraan teoreemasta.

Korollaari 3.1.1. *Olkoon $\{x_1, ..., x_n\}$ ortogonaalinen systeemi, missä $x_i \neq 0$ kaikilla indekseillä. Systeemi on lineaarisesti riippumaton.*

Todistus. Olkoon $\{x_1, ..., x_n\}$ ortogonaalinen systeemi, missä $x_i \neq 0$ kaikilla i. Oletetaan, että

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$

jollakin $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Nyt systeemin ortogonaalisuutta ja Pythagoraan teoreemaa käyttäen saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \parallel x_i \parallel = \parallel \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \parallel = 0$$

Tällöin siis pätee $\lambda_i = 0$ kaikilla i ja edelleen vektorit $x_1, ..., x_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia. □

Vektorit eivät kuitenkaan ole aina kohtisuorat. Tällöin Pythagoraan teoreeman sijasta voidaan käyttää Suunnikasyhtälöä.

Lause 3.10 (Suunnikasyhtälö)**.** *Jos E on sisätuloavaruus ja $x, y \in E$, niin*

$$\parallel x + y \parallel^2 + \parallel x - y \parallel^2 = 2(\parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2). \tag{3.9}$$

Todistus. Todistus saadaan suoraan laskemalla hyödyntäen sisätulon ominaisuuksia.

$$\begin{aligned}
\parallel x + y \parallel^2 + \parallel x - y \parallel^2 =& (x + y) \cdot (x + y) + (x - y) \cdot (x - y) \\
=& x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \\
& + x \cdot x - x \cdot y - y \cdot x + y \cdot y \\
=& 2(\parallel x \parallel^2 + \parallel y \parallel^2)
\end{aligned}$$

□

Suunnikasyhtälö on muun muassa kätevä todistamaan, että sisätuloavaruus ei ole Hilbertin avaruus.

Ortogonaalisille vektoreille vastaava käsite on määriteltävissä joukoille. Tällöin puhutaan joukon A ortokomplementista, eli joukosta, jonka kaikki vektorit ovat ortogonaalisia joukon A vektoreiden kanssa.

Määritelmä 3.11 (Ortokomplementti)**.** *Olkoon E Hilbertin avaruus ja $A \subset E$ osajoukko. Tällöin joukon A ortokomplementti on joukko*

$$A^{\perp} = \{y \in E : x \cdot y = 0 \text{ kaikilla } x \in A\}.$$

Määritellään vielä vektoreiden ortogonaaliset projektiot jonkin aliavaruuden suuntaan. Ortoprojektio on lineaarinen kuvaus.

Määritelmä 3.12 (Ortoprojektio)**.** *Olkoon H vektoriavaruus ja $Z \subset H$ sen vektorialijoukko. Kuvaus $P_Z : H \to H$, joka liittää vektoriin x sen yksikäsitteisen vektorin $y \in Z$, joka minimoi x:n etäisyyden vektorialiavaruuten Z. Toisin sanoen*

$$P_Z(x) = y \quad \text{jos ja vain jos } \parallel x - y \parallel = dist(x, Z), \tag{3.10}$$

missä $dist(t, k)$ on etäisyys parametrien t ja k välillä.

Todistetaan seuraavaksi Projektioteoreema, joka on tämän kappaleen päätuloksia. Sitä käytetään takaamaan yksikäsitteisyys Rintamavoittojen teoreemassa 4.1 sekä jaotellessa toimijan pääomaa kappaleessa 6.

Teoreema 3.2 (Projektioteoreema)**.** *Olkoon H Hilbertin avaruus ja $Z \subset H$ sen osajoukko, jonka virittää äärellinen määrä vektoreita. Tällöin kaikilla vektoreilla $x \in H$ on olemassa yksikäsitteiset vektorit $x^z \in Z$ ja $y \in Z^\perp$ siten, että $x = x^z + y$.*

Todistus. Olkoon $\{z_1, ..., z_n\}$ ortogonaalinen systeemi, joka virittää avaruuden Z. Määritellään

$$x^z = \sum_{i=1}^{n} \frac{x \cdot z_i}{z_i \cdot z_i} z_i \quad \text{ja} \quad y = x - x^z.$$

Vektori x^z on siis osajoukossa Z. Osoitetaan, että $y \in Z^\perp$:

$$\begin{aligned} y \cdot z_j &= \Big(x - \sum_{i=1}^{n} \frac{x \cdot z_i}{z_i \cdot z_i} z_i\Big) \cdot z_j \\ &= \Big(x - \frac{x \cdot z_j}{z_j \cdot z_j} z_j\Big) \cdot z_j = 0 \end{aligned}$$

Näin ollen $y \perp z_j$ kaikilla $j = 1, ..., n$. Osoitetaan vielä, että vektorit ovat yksikäsitteiset. Oletetaan, että $x = x_1^z + y_1 = x_2^z + y_2$ joillakin $x_1^z, x_2^z \in Z$ ja $y_1, y_2 \in Z^\perp$. Nyt Pythagoraan teoreeman mukaan

$$\parallel y_2 \parallel^2 = \parallel x_1^z - x_2^z \parallel^2 + \parallel y_1 \parallel^2$$

ja vastaavasti

$$\parallel y_1 \parallel^2 = \parallel x_1^z - x_2^z \parallel^2 + \parallel y_2 \parallel^2$$

Näiden yhtälöiden mukaan $\parallel x_1^z - x_2^z \parallel^2 = 0$, jolloin sisätulon positiivisuuden perusteella $x_1^z = x_2^z$, eli vektorit ovat yksikäsitteiset. $\square$

3.2 Riesz-Frechet

Sisätulon, ortogonaalisuuden ja Hilbertin avaruuksien lisäksi lineaariset kuvaukset ja niiden ytimet tulevat olemaan keskeisessä asemassa rakentaessamme CAP-mallia. Lineaarisen kuvauksen ytimenä puhutaan siis sellaisesta lähtöjoukon alkioiden muodostamasta joukosta, jotka kyseinen lineaarinen kuvaus kuvaa nollaksi. Riesz-Frechetin teoreeman mukaan saamme esitettyä lineaariset funktionaalit sisätulon avulla.

Määritelmä 3.13 (Ydin)**.** *Olkoon E normiavaruus ja $F : E \to \mathbb{R}$ lineaarinen kuvaus. Kuvauksen F ydin on*

$$Ker(F) = \{x \in E : Fx = 0\}. \tag{3.11}$$

Tämän ytimen määritelmän tarkoitus on auttaa määrittelemään jatkuvat lineaariset funktionaalit, jotka määritellään seuraavaksi. Yleisesti tässä työssä, kun puhutaan ytimistä, niin tarkoitetaan määritelmän 3.4 Rieszin ytimiä.

Määritelmä 3.14 (Lineaarinen funktionaali)**.** *Lineaarinen funktionaali on lineaarinen kuvaus $F\colon E \to \mathbb{K}$, jonka maaliavaruutena on sen skaalaarikunta $\mathbb{K}$. Edelleen, jatkuva lineaarinen funktionaali määritellään sellaiseksi, jonka ydin on suljettu joukko.*

Määritellään seuraavaksi kaksi oleellista lineaarista funktionaalia. Määritelmissä käytetään kappaleen 2 merkintöjä.

Määritelmä 3.15 (Hinnoittelufunktionaali)**.** *Kuvaus $q : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ on hinnoittelufunktionaali, mikäli pätee*

$$q(z) \equiv \{w : w = ph \text{ jollakin } h \text{ siten, että } z = hX\}, \tag{3.12}$$

missä $p = [p_1, ..., p_N]$ on arvopapereiden hintavektori.

Määritelmä 3.16 (Odotusarvofunktionaali)**.** *Odotusarvofunktionaali E liittää jokaisen voiton $z \in \mathcal{M}$ tämän odotusarvoon $\mathbb{E}(z)$, eli*

$$E(z) = \mathbb{E}(z), \tag{3.13}$$

missä odotusarvo on otettu sopivalla todennäköisyysmitalla π.

Tämän todennäköisyysmitan voidaan ajatella olevan yksittäisen toimijan subjektiivinen todennäköisyysmitta. Näiden funktionaalien avulla määritellään odotusarvoydin ja hinnoitteluydin yhtälöissä (3.18) ja (3.19). Nimensä mukaisesti odotusarvofunktionaalia käytetään kuvaamaan voittoja, niiden odotusarvoiksi. Vastaavasti hinnoittelufunktionaalia käytetään hinnoittelemaan voittoja.

Seuraavaa teoriaa voidaan käyttää yksinkertaistamaan lineaarisen funktionaalin esitystä. Tämä kyseinen esitys muodostuu sisätulosta lähtöavaruuden alkion x ja yksikäsitteisen vektorin k_f välillä.

Teoreema 3.3 (Riesz-Frechet)**.** *Olkoon H Hilbertin avaruus. Jos $F : H \to \mathbb{R}$ on jatkuva lineaarinen funktionaali, niin on olemassa yksikäsitteinen vektori $k_f \in H$ siten, että*

$$F(x) = k_f \cdot x \qquad \textit{kaikilla } x \in H.$$

Todistus. Jos F on nollafunktionaali, niin valitaan $k_f = 0$. Oletetaan, että F ei ole nollafunktionaali. Olkoon $N = \{x \in H : F(x) = 0\}$ ja $N^{\perp}$ sen ortokomplementti. Tällöin $H = N + N^{\perp}$ ja $N^{\perp} \neq \{0\}$.

Valitaan vektori $z \in N^{\perp}$, joka ei ole nollavektori. Kertomalla vektoria z jollakin skalaarilla, saadaan $F(z) = 1$. Projektioteoreeman 3.2 mukaan, mielivaltainen vektori $x \in H$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$x = \big(x - F(x)z\big) + F(x)z,$$

missä $\big(x - F(x)z\big) \in N$. Koska $z \in N^{\perp}$, saadaan yhtälö

$$z \cdot x = z \cdot \big(F(x)z\big).$$

Valitaan $k_f = \frac{z}{(z \cdot z)}$, jolloin pätee

$$k_f \cdot x = \frac{F(x)(x \cdot x)}{(x \cdot x)} = F(x),$$

kuten haluttiin.

Osoitetaan vielä k_f:n yksikäsitteisyys. Oletetaan, että k_f ja $k_f^{'}$ ovat molemmat sopivia. Silloin

$$(k_f - k_f^{'}) \cdot x = 0$$

pätee kaikilla $x \in H$, eli $(k_f - k_f^{'}) = 0$. □

Riesz-Frechetin teoreeman yksikäsitteisestä vektorista käytetään seuraavaa komponettimuotoista merkintää $k_f = (k_{f_1}, ..., k_{f_S})$.

3.3 Rieszin ytimistä

Käydään seuraavaksi läpi Rieszin ytimien rakentaminen ja katsotaan erityisesti odotusarvoydintä k_e ja hinnoitteluydintä k_q. Nämä ovat odotusarvofunktionaalin E ja hinnoittelufunktionaalin q ytimet. Käyttäen Riesz-Frechetin teoreemaa 3.3 päädymme seuraaviin kahteen tulokseen.

Teoreema 3.4 (Rieszin ydin)**.** *Olkoon F lineaarinen funktionaali Hilbertin avaruudessa $\mathbb{R}^S$, joka on varustettu euklidisella sisätulolla. Olkoon s tila-avaruuden tila, k_f Riesz-Frechetin teoreeman mukainen vektori ja $x \in \mathcal{M}$ mielivaltainen voitto. Rieszin ydin* *saadaan muodostettua yhtälöistä*

$$k_{f_s} = F(e_s) \tag{3.14}$$

käyttäen lineaarisuutta, jolloin $F(x) = \sum_s k_{f_s} x_s$, *missä* k_{f_s} *on tilaa* s *vastaava vektorin* k_f *komponentti.*

Rieszin ydin voidaan määritellä vastaavasti yhtälön (3.7) odotusarvoiselle sisätulolle, käyttäen muunnosta $k_{f_s} = \frac{k_s}{\pi_s}$. Rieszin ytimellä siis tarkoitetaan vektoria k_f, kun pelkkä ydin 3.13 määriteltiin aiemmin joukkona. Hyödynnetään tietoa, että Hilbertin avaruuden täydellinen aliavaruus varustettuna samalla sisätulolla on myös Hilbert ja niissä voidaan siis käyttää Riesz-Frechetin teoreemaa lineaarisille funktionaaleille.

Teoreema 3.5. *Olkoon* Z *Hilbertin avaruuden* H *täydellinen aliavaruus varustettuna samalla sisätulolla. Oletetaan lisäksi, että* F *on avaruuden* Z *jatkuvan lineaarisen funktionaalin rajoittuma aliavaruuteen* H. *Tällöin on olemassa yksikäsitteinen Rieszin ydin* k_f, *jolle pätee*

$$F(z) = k_f \cdot z \tag{3.15}$$

kaikilla $z \in Z$.

Käydään seuraavaksi Rieszin ytimen k_f konstruktio läpi lineaariselle funktionaalille $F : Z \to \mathbb{R}$, kun aliavaruuden Z virittää äärellinen kokoelma vektoreita $\{z_1, ..., z_n\}$. Olkoon $w_i = F(z_i)$, jokaisella $i = 1, ..., n$. Tällöin Rieszin ytimen k_f tulee täyttää n kappaletta yhtälöitä

$$w_i = k_f \cdot z_i \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.16}$$

Tämä voidaan kirjoittaa $k_f = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j$, koska $k_f \in Z$ ja missä a_j kuuluvat joukkoon $\mathbb{K}$. Sijoittamalla se yhtälöön (3.16), saadaan uudet n kappaletta yhtälöitä

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j \cdot z_i \qquad i = 1, ..., n. \tag{3.17}$$

Ehtoja ja tuntemattomia a_j on molempia n kappaletta ja vektorit z_j ovat lineaarisesti riippumattomia, joten termit a_j ovat ratkaistavissa.

Määritellään seuraavaksi odotusarvofunktionaaliin 3.16 ja hinnoittelufunktionaaliin 3.15 perustuvat Rieszin ytimet.

Määritelmä 3.17 (Odotusarvoydin)**.** *Rieszin ydin* k_e *odotusarvofunktionaalille* E *on se avaruuden* $\mathcal{M}$ *yksikäsitteinen voitto, joka toteuttaa yhtälön*

$$E(z) = \mathbb{E}(k_e z), \tag{3.18}$$

kaikilla $z \in \mathcal{M}$. *Yhtälön oikealla puolella on yhtälön* (3.7) *odotusarvoon perustuva sisätulo.*

Odotusarvoytimen voi konstruoida aiempien ohjeiden mukaisesti, jotka ovat teoreeman 3.5 jälkeen. Tällöin arvopapereiden voitot $x_1, ..., x_n$ valitaan kannaksi arvopaperiavaruudelle $\mathcal{M}$. Funktionaali saa tällöin muodon $F(x) = \sum_s k_s x_s$, ja edelleen yhtälöstä $k_{f_s} = k_s/\pi_s$ seuraa $F(x) = \sum_s \pi_s k_{f_s} x_s = \mathbb{E}(k_f x)$. Yhtälön (3.18) ei tarvitse päteä, jos $z \notin \mathcal{M}$.

Määritellään vastaavalla tavalla hinnoitteluydin, käyttäen määritelmän 3.15 hinnoittelufunktionaalia.

Määritelmä 3.18 (Hinnoitteluydin)**.** *Rieszin ydin k_q hinnoittelufunktionaalille q sijoituskohteidenavaruudessa $\mathcal{M}$ on se yksikäsitteinen voitto, joka toteuttaa yhtälön*

$$q(z) = \mathbb{E}(k_q z) \tag{3.19}$$

kaikilla $z \in \mathcal{M}$.

Kirjan Princibles of Financial Economics [1] kappaleen 17.10 mukaan, jos markkinat ovat arbitraasivapaat, niin on olemassa aidosti positiivinen tilahintavektori $q = (q_1, ..., q_S)$, jolla pätee

$$q(z) = \sum_s q_s z_s \tag{3.20}$$

kaikilla $z \in \mathcal{M}$. Katsotaan tapausta, jossa skaalataan tilahintavektorin komponentteja vastaavien tilojen todennäköisyyksillä. Merkitään tätä termillä $q/\pi = (q_1/\pi_1, ..., q_s/\pi_s)$ ja sijoitetaan se yhtälöön (3.20), jolloin saadaan

$$q(z) = \mathbb{E}\left(\frac{q}{\pi} z\right). \tag{3.21}$$

Nyt yhtälöiden (3.19) ja (3.21) perusteella voidaan kirjoittaa yhtälö

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{q}{\pi} - k_q\right) z\right) = 0, \tag{3.22}$$

joka pätee kunhan $z \in \mathcal{M}$. Siispä $\frac{q}{\pi} - k_q$ on ortogonaalinen sijoituskohteiden avaruuden $\mathcal{M}$ kanssa. Edelleen voidaan todeta, että hinnoitteluydin k_q on q/π projektio sijoituskohteiden avaruuteen $\mathcal{M}$, koska $q/\pi = (q/\pi - k_q) + k_q$.

Sijoittamalla $z = k_e$ yhtälöön (3.21) saadaan

$$\mathbb{E}\left(\frac{q}{\pi}\right) = \mathbb{E}(k_q) \tag{3.23}$$

Tämän perusteella, jos tilahintavektori q on positiivinen ja nollasta poikkeava, niin hinnoitteluytimen odotusarvo on aidosti positiivinen. Edelleen, jos riskitön voitto on mukana sijoituskohteiden avaruudessa, niin

$$\mathbb{E}(k_q) = \mathbb{E}(k_q k_e) = \frac{1}{r}. \tag{3.24}$$

Mainitaan vielä, että hinnoitteluydin on yksikäsitteinen täsmälleen silloin, kun markkinat ovat täydelliset.

4 Odotusarvoanalyysista

4.1 Odotusarvorintama

Tässä kappaleessa tarkastellaan odotusarvoanalyysia, eli analysoidaan sijoitusten voittoja niiden odotusarvojen ja varianssin avulla. Varianssin tulkitaan siis mittaavan sijoituskohteiden riskiä. Tavoitteena on tunnistaa sijoituskohteet, joilla odotusarvoinen voitto maksimoituu suhteessa varianssiin. Vaihtoehtoisesti annetulla varianssilla, maksimoidaan sijoituskohteiden odotusarvoinen voitto. Kutsutaan näitä sijoituskohteita rintamavoitoiksi. Tämä analyysi perustuu aikaisemmin esiteltyihin Hilbertin avaruuksien ominaisuuksiin, erityisesti Riesz-Frechetin teoreemaan. Teoreeman avulla esitetään voittojen hinnoittelufunktionaali hinnoitteluytimen avulla ja vastaavasti odotusarvofunktionaali odotusarvoytimen avulla. Tuotot, joilla varianssi minimoituu annetulla tuotolla, sijaitsevat odotusarvorintamalla, joka kulkee hinnoittelu- ja odotusarvoytimien voittojen kautta.

Määritelmä 4.1. *Voittoa kutsutaan odotusarvorintaman voitoksi, jos ei ole olemassa yhtään toista voittoa, jolla olisi sama hinta ja odotusarvo, sekä pienempi varianssi.*

Kohdassa 3.3 määriteltiin seuraavassa teoreemassa käytettävät ytimet. Tarkemmin, ne on määritelty yhtälöissä (3.18) ja (3.19). Käytännössä nämä kaksi ydintä ovat vektoreita, jotka kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^S$ ja virittävät avaruuden $\mathcal{E}$, eli $\mathcal{E} = \operatorname{span}\{k_e, k_q\}$. Todistetaan seuraavaksi, että näiden vektoreiden virittämä avaruus $\mathcal{E}$ on sama kuin odotusarvorintaman voittojen joukko.

Teoreema 4.1 (Rintamavoitto)**.** *Olkoon $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ aliavaruus, jonka odotusarvoydin k_e ja hinnoitteluydin k_q virittävät. Voitto on odotusarvorintaman voitto, jos ja vain jos se sijaitsee joukossa $\mathcal{E}$.*

Todistus. Ottamalla ortoprojektion 3.12 mielivaltaiselle voitolle $z \in \mathcal{M}$ aliavaruuden $\mathcal{E}$ suuntaan johtaa yhtälöön

$$z = z^{\mathcal{E}} + \epsilon,$$

missä $z^{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$ ja $\epsilon \in \mathcal{E}^{\perp}$. Kyseinen jaottelu on samanlainen kuin projektioteoreemassa 3.2, joka siis takaa vektoreiden yksikäsitteisyyden, koska $\mathcal{E}$ on Hilbert. Erityisesti alkio ϵ on ortogonaalinen molempien ytimien k_e ja k_q kanssa. Tällä perusteella alkion ϵ

odotusarvo ja hinta ovat molemmat nollia ja tarkoittaa siis sitä, että z ja $z^{\mathcal{E}}$ omaavat saman odotusarvon ja hinnan. Edelleen, koska ϵ on ortogonaalinen $z^{\mathcal{E}}$ kanssa ja $\mathbb{E}(\epsilon) = 0$, saadaan $\mathrm{cov}(\epsilon, z^{\mathcal{E}}) = \mathbb{E}(\epsilon)\mathbb{E}(z^{\mathcal{E}}) = 0$. Varianssi on korreloimattomuuden perusteella $\mathrm{var}(z) = \mathrm{var}(z^{\mathcal{E}}) + \mathrm{var}(\epsilon)$, siispä $\mathrm{var}(z^{\mathcal{E}}) \leq \mathrm{var}(z)$, missä epäyhtälö on aito silloin kun $\epsilon \neq 0$. Tästä seuraa, että jokainen odotusarvorintaman voitto sijaitsee aliavaruudessa $\mathcal{E}$.

Toiseen suuntaan, halutaan osoittaa, että jokainen voitto $\mathcal{E}$:ssä on odotusarvorintaman voitto. Oletetaan, että tämä ei pitäisi paikkansa. Tällöin tulisi olla olemassa toinen voitto $z^{'}$, jolla olisi sama hinta ja odotusarvo, mutta pienempi varianssi kuin z:lla. Käyttäen todistuksen ensimmäisen osan argumenttia, voidaan olettaa, että $z^{'} \in \mathcal{E}$. Koska termeillä z ja $z^{'}$ on sama hinta ja odotusarvo, seuraavat yhtälöt pätevät $\mathbb{E}[k_q(z - z^{'})] = 0$ ja $\mathbb{E}[k_e(z - z^{'})] = 0$. Tästä seuraa, että voitto $z - z^{'} \in \mathcal{E}^{\perp}$ ja koska myös voitto $z - z^{'} \in \mathcal{E}$, saadaan $z = z^{'}$. Tämä on vastoin oletusta ja todistaa väitteen. □

Odotusarvorintaman voittoja sanotaan lyhyesti rintamavoitoiksi ja näiden voittojen tuottoja rintamatuotoiksi. Odotusarvorintama $\mathcal{E}$ on joko suora tai taso, riippuen siitä ovatko hinnoittelu- ja odotusarvoydin kolineaariset. Tässä kolineaarisuus tarkoittaa sitä, että näille ytimille pätee yhtälö $k_q = \lambda k_e$ jollakin $\lambda \neq 0$.

Tapauksessa, jossa ytimet ovat kolineaariset, niin odotusarvorintama $\mathcal{E}$ on suora. Jos riskitön voitto sijaitsee arvopaperimarkkinoilla, niin k_q ja k_e ovat kolineaariset, jos ja vain jos markkinat on hinnoiteltu reilusti. Reilu hinnoittelu tarkoittaa tässä sitä, että jos yhtälö $\mathbb{E}(r_j) = \overline{r}$ pätee jokaisen sijoituskohteen j tuottoasteelle, niin ytimet ovat muotoa $k_e = u$ sekä $k_q = (1/\overline{r})u$, missä u on riskitön voitto. Yleisesti kolineaarisuus pätee ytimille, jos ja vain jos kaikilla portfolioilla on sama odotustuotto $1/\lambda$. Muutoin, jos k_q ja k_e eivät ole kolineaariset, niin odotusarvorintama $\mathcal{E}$ on taso.

Määrätään seuraavassa esimerkissä rintamatuoton r_λ odotusarvo, varianssi ja keskihajonta. Esimerkissä on hyödynnetty määritelmien 3.18 ja 3.19 odotusarvo- ja hinnoitteluytimiä.

Esimerkki 4.1.1. *Odotusarvo- k_e ja hinnoitteluytimien k_q tuotot määritellään kaavoilla*

$$r_e = \frac{k_e}{\mathbb{E}(k_q)} \qquad \textit{ja} \qquad r_q = \frac{k_q}{\mathbb{E}(k_q^2)}, \tag{4.1}$$

missä hinnoittelufunktionaalia 3.15 *käytettiin määräämään ytimien k_e ja k_q hinnat. Ne ovat edellisen teoreeman perusteella rintamatuottoja. Jos tuoton, erityisesti positiivisen, hinta olisi nolla, niin kyseessä olisi määritelmän* 2.10 *mukainen arbitraasi. Muistetaan, että tuotto on yhdistettävissä hintaansa suoraan määritelmänsä* 2.4 *perusteella. Oletetaan, että markkinat toimivat sen verran tehokkaasti, että niillä ei ole mahdollisuuksia arbitraasiin* 2.10.

Jos odotusarvo- ja hinnoitteluydin ovat kolineaariset, niin tuotot r_e ja r_q ovat yhtä *suuret, esimerkkiä edeltäneen päättelyn perusteella. Rintamatuottojen joukolla on tällöin kaikilla sama tuotto r_e. Luonnollisesti r_e on riskitön silloin, kun riskitön sijoituskohde on mukana arvopaperimarkkinoilla.*

Oletetaan loppukappaleen ajan, että ytimet k_q ja k_e eivät ole kolineaariset. Tällöin rintamatuottojen joukko on suora, jonka tuotot r_q ja r_e virittävät. Tämä suora voidaan kirjoittaa muodossa

$$r_\lambda = r_e + \lambda(r_q - r_e), \tag{4.2}$$

missä $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tämän rintamatuoton r_λ odotusarvo on luonnollisesti, odotusarvon lineaarisuuden perusteella,

$$\mathbb{E}(r_\lambda) = \mathbb{E}(r_e) + \lambda[\mathbb{E}(r_q) - \mathbb{E}(r_e)] \tag{4.3}$$

ja vastaavasti sen varianssi on

$$var(r_\lambda) = var(r_e) + 2\lambda cov(r_e, r_q - r_e) + \lambda^2 var(r_q - r_e). \tag{4.4}$$

Merkitään tuoton r_λ keskihajontaa termillä $\sigma(r_\lambda)$, joka on siis varianssin neliöjuuri $\sqrt{var(r_\lambda)}$.

Esimerkki 4.1.2. *Jatketaan edellistä esimerkkiä sillä oletuksella, että odotusarvoydin on riskitön. Teoreeman* 4.1 *mukaan se kuuluu odotusarvorintamalle $\mathcal{E}$. Tällöin rintamavoiton* 4.1 *määritelmän perusteella tiedetään, että sen tuotto vastaa riskitöntä tuottoa $\overline{r}$. Edelleen, rintamatuoton r_λ odotusarvo on*

$$\mathbb{E}(r_\lambda) = \overline{r} + \lambda[\mathbb{E}(r_q) - \overline{r}]. \tag{4.5}$$

Oletetaan edelleen, että odotusarvoydin on riskitön. Tällöin yhtälön (4.4) *perusteella rintamatuoton r_λ varianssi on*

$$var(r_\lambda) = \lambda^2 var(r_q) \tag{4.6}$$

ja edelleen keskihajonta on

$$\sigma(r_\lambda) = |\lambda|\sigma(r_q) \tag{4.7}$$

yhtälön (4.4) *perusteella.*

Lienee luonnollista todeta, että aina on olemassa rintamatuotto, jolla on pienin varianssi ja silloin, kun riskitön sijoituskohde on mukana arvopaperimarkkinoilla, niin tämä varianssi on nolla. Muussa tapauksessa kaikilla rintamatuotoilla on positiivinen varianssi ja näiden minimi saadaan minimoimalla yhtälö (4.4) termin λ suhteen. Huomataan, että yhtälö (4.4) on toisen asteen yhtälö λ suhteen, joten haluttu minimikohta löytyy derivaatan nollakohdasta, koska λ:n määrittelyväli on avoin. Tämä minimi on

$$\lambda_0 = -\frac{\mathrm{cov}(r_e, r_q - r_e)}{\mathrm{var}(r_q - r_e)}. \tag{4.8}$$

Kyseessä on minimi, koska toisen asteen termin kerroin kaavassa (4.4) on positiivinen.

Määritelmä 4.2 (Odotusarvoinen optimi)**.** *Tuotto on odotusarvoisesti optimaalinen, jos ei ole olemassa toista tuottoa, jonka varianssi on sama, mutta odotusarvo on suurempi.*

Toisin sanoen odotusarvoisesti optimaalliset tuotot maksimoivat odotusarvoisen tuoton suhteessa varianssiin. Todetaan, että rintamatuotot, joiden odotusarvot ovat minimivarianssin tuottoa korkeampia, ovat odotusarvoisesti optimaallisia. Jos odotusarvoydin on riskitön, niin ne ovat kaikki rintamatuotot r_λ, joilla $\lambda \leq 0$, ja tällöin tuotot hinnoitteluytimellä eivät ole optimaalisia. Hinnoitteluytimen tuottojen epäoptimaallisuus pätee epäyhtälön $\overline{r} > \mathbb{E}(r_q)$ perusteella. Se on johdettu ottamalla odotusarvo hinnoitteluytimen tuotolle ja käyttäen hyväksi yhtälöä $\overline{r} = \frac{1}{\mathbb{E}(k_q)}$, siis

$$\mathbb{E}(r_q) = \frac{\mathbb{E}(k_q)}{\mathbb{E}(k_q^2)} < \frac{1}{\mathbb{E}(k_q)} = \overline{r}. \tag{4.9}$$

4.2 Beta-hinnoittelu

Koska rintamatuotot muodostavat tason, on mahdollista käyttää mitä tahansa kahta erillistä rintamatuottoa virittämään tämä taso. Näytetään seuraavaksi, että kaikille rintamatuotoille r_λ, paitsi minimaalisen varianssin rintamatuotolle, on olemassa toinen rintamatuottopari r_μ, joiden välillä on tärkeä ominaisuus. Näiden kahden rintamatuoton välinen kovarianssi on nolla. Tämä tarkoittaa sitä, että näiden sijoituskohteiden voitot eivät riipu toisistaan. Oletettavasti näitä sijoituskohteita eivät tällöin myöskään koske samat riskit. Koko portfolion rakentaminen täysin keskenään korreloimattomista sijoituskohteista on käytännössä lähinnä toiveajattelua, mutta tilannetta on kiinnostavaa tutkia. Erityisesti muistetaan, että käytännössä sijoituskohteiden keskinäiset korrelaatiot eivät ole staattisia, vaan muuttuvat myös eri ajanhetkien välillä. Näiden korrelaatioiden oletetaan kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi olevan tässä työssä deterministisiä. Mainitaan, että monitilaisessa mallissa ne voisi esimerkiksi mallintaa stokastisina prosesseina.

Käsitellään seuraavaksi yhtälön (4.2) rintamatuottoa r_λ ja etsitään sille tämä korreloimaton pari. Sama yhtälö antaa myös tämän toisen rintamatuoton r_μ, joka ei korreloi r_λ kanssa, kunhan seuraava yhtälö toteutuu

$$\mathrm{cov}(r_\lambda, r_\mu) = \mathrm{var}(r_e) + (\lambda + \mu)\mathrm{cov}(r_e, r_q - r_e) + \lambda\mu\mathrm{var}(r_q - r_e) = 0. \tag{4.10}$$

Ratkaisemalla tämä yhtälö μ suhteen saadaan

$$\mu = \frac{\mathrm{var}(r_e) + \lambda \mathrm{cov}(r_e, r_q - r_e)}{\mathrm{cov}(r_e, r_q - r_e) + \lambda \mathrm{var}(r_q - r_e)}. \tag{4.11}$$

Yhtälö on hyvin määritelty, kunhan nimittäjä ei ole nolla. Tämä on nolla juurikin, silloin kun $\lambda = \lambda_0$, eli r_λ on minimivarianssin rintamatuotto. Minimivarianssian rintamatuotolle ei siis ole mahdollista yhdistää korreloimatonta rintamatuottoparia. Jos riskitön sijoituskohde on mukana arvopaperimarkkinoilla, niin sen tuotto on tietenkin kaikkien muiden rintamatuottojen kanssa korreloimaton. Kutsutaan tätä korreloimatonta tuottoparia nolla kovarianssin pariksi.

Esitellään seuraavaksi β-kertoimet sijoituskohteille määritelmässä 4.3. Määrittelyssä käytetään hyväksi rintamatuotolle olemassa olevaa korreloimatonta paria. Olkoon r_λ jokin muu rintamatuotto kuin minimivarianssin omaava ja r_μ rintamatuotto, jonka kanssa r_λ kovarianssi on nolla. Ottamalla määritelmän 3.12 mukaisen ortoprojektion, käyttäen odotusarvoista sisätuloa, sijoituskohteen j tuotolle r_j rintamatuottojen tasolle $\mathcal{E}$ voidaan johtaa seuraava yhtälö

$$r_j = r_j^{\mathcal{E}} + \epsilon_j, \tag{4.12}$$

missä $r_j^{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$ ja $\epsilon_j \in \mathcal{E}^\perp$. Erityisesti ϵ_j on ortogonaalinen tason $\mathcal{E}$ virittävien ytimien k_e ja k_q kanssa, joten sen hinta ja tuoton odotusarvo ovat nolla. Koska ϵ_j hinta on nolla, niin $r_j^{\mathcal{E}}$ on rintamatuotto.

Määritelmä 4.3 (β-kerroin)**.** *Olkoon r_λ jokin muu rintamatuotto kuin minimivarianssin omaava ja r_μ rintamatuotto, jonka kanssa r_λ kovarianssi on nolla. Käytetään tuottoja r_λ ja r_μ virittämään rintamatuottojen taso. Tällöin tuotto $r_j^{\mathcal{E}}$ voidaan kirjoittaa muodossa $r_\mu + \beta_j(r_\lambda - r_\mu)$ jollekin β_j. Edelleen*

$$r_j = r_\mu + \beta_j(r_\lambda - r_\mu) + \epsilon_j \tag{4.13}$$

ja otetaan odotusarvot puolittain

$$\mathbb{E}(r_j) = \mathbb{E}(r_\mu) + \beta_j[\mathbb{E}(r_\lambda) - \mathbb{E}(r_\mu))]. \tag{4.14}$$

Vastaavasti, ottamalla kovarianssin puolittain yhtälöstä (4.13) *r_λ suhteen ja ratkaisemalla β_j, saadaan*

$$\beta_j = \frac{cov(r_j, r_\lambda)}{r_\lambda}. \tag{4.15}$$

Siis β_j on r_j:n regressiokerroin r_λ suhteen.

Jos riskitön tuotto on mukana arvopaperimarkkinoilla, niin yhtälö (4.14) *saa muodon*

$$\mathbb{E}(r_j) = \overline{r} + \beta_j[\mathbb{E}(r_\lambda) - \overline{r})], \tag{4.16}$$

koska riskittömän tuoton kovarianssi on nolla kaikkien muiden tuottojen kanssa.

Relaatioita (4.15) ja (4.16) kutsutaan beta-hinnoittelu yhtälöiksi. Niiden mukaan, minkä tahansa sijoituskohteen riskipreemio on verrannollinen sen tuoton kovarianssiin sopivan rintamatuoton kanssa.

Näitä relaatioita voi hyödyntää myös portfolio tuottojen kanssa. Jos riskitön tuotto on mukana arvopaperimarkkinoilla, niin odotusarvo $\mathbb{E}(r)$ mielivaltaiselle tuotolle r toteuttaa yhtälön

$$\mathbb{E}(r) = \overline{r} + \beta[\mathbb{E}(r_\lambda) - \overline{r}], \tag{4.17}$$

missä

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}(r, r_\lambda)}{\operatorname{var}(r_\lambda)}. \tag{4.18}$$

Positiivinen beta-kerroin tarkoittaa, että sen omaavan sijoituskohteen tuoton voi odottaa liikkuvan markkinatuoton mukana suhdanteissa, sitä enemmän mitä suurempi kerroin on. Esimerkiksi perusmetalleja, kuten kuparia, tuottavan yrityksen beta-kertoin on oletettavasti suuri, mahdollisesti jopa yli yhden. Tätä voi selittää yrityksen tuotteen kysynnän vahvasta riippuvuudesta teollisuustuotantoon. Vastaavasti negatiivisen beta-kertoimen omaavan sijoituksen tuoton voi odottaa kasvavan laskusuhdanteessa, kun markkinatuotto laskee. Annetaan vielä esimerkki tällaisesta sijoituskohteesta ja myös sijoituskohteiden välisten korrelaatioiden muutoksesta. Valtioiden velkakirjoja on esitetty riskittöminä sijoituskohteina, kuitenkin markkinoiden pudotessa, ne näkevät usein "turvasatama-tyyppisiä rahavirtoja. Tällöin niiden korot luonnollisesti putoavat, jolloin niiden hinta nousee ja ne korreloivat siis markkinoiden kanssa negatiivisesti ja niillä voidaan tulkita olevan negatiivinen beta-kerroin.

Myöhemmin tullaan näyttämään kappaleessa 6, että CAP-mallin markkinatuotto on rintamatuotto, jonka mukaan siis arvopaperimarkkinasuoran määritelmä 6.4 on beta-hinnoittelun erikoistapaus. Seuraavan esimerkin on tarkoitus valaista sitä ominaisuutta, johon CAP-malli perustuu.

Esimerkki 4.1.3. *Olkoon tila-avaruus $S = \{1, 2\}$ ajanhetkellä 1, molemmat tilat yhtä todennäköisiä ja markkinoilla on ainakin sijoituskohteet a ja b. Olkoon sijoituskohteen a mahdolliset voitot tila-avaruudessa S muotoa $\{1.2, 0.9\}$, sijoituskohteen b $\{0.9, 1.2\}$ ja hetkellä 0 molempien sijoituskohteiden hinta 1. Olkoon toimijan j alkupääoma 100, jonka hän sijoittaa tasan kohteiden a ja b välillä $\theta^j_a = \theta^j_b = 50$. Toimijan salkun odotusarvoinen voitto on tällöin muotoa*

$$\mathbb{E}(\theta^j X) = \frac{1}{2}(50 * 1.2 + 50 * 0.9) + \frac{1}{2}(50 * 0.9 + 50 * 1.2) = 105.$$

Edelleen, suoraan määritelmän perusteella salkun odotustuotto on 5 prosenttia. Salkku saavuttaa kyseisen tuoton molemmissa tila-avaruuden tiloissa, joten sen varianssi tai *riski on nolla. Tässä erikoistapauksessa onnistuttiin hankkiutumaan sijoitusriskistä kokonaan eroon, vaikka portfolio sisältää ainoastaan riskillisiä arvopapereita.*

Beta-kertoimien avulla voidaan menetellä vastaavalla tavalla. Esimerkiksi, sijoitetaan kolmeneljäsosaa markkinasalkkuun, eli sen beta-kerroin on yksi ja loput sijoituskohteeseen c, jonka beta-kerroin on -3. Jos beta-kertoimet pysyvät staattisina, niin tämä sijoitusstrategia saavuttaa markkinatuoton ilman riskiä. Molemissa tapauksissa saavutetaan riskiltä suojaava vaikutus hajauttamalla usean sijoituskohteen välille. Tästä käytetään nimitystä hajautushyöty.

5 Kulutukseen perustuvat arvopaperien hinnat

Ensimmäisen kertaluvun ehdot kulutusongelmalle, teoreema 2.1, ja edelleen yhtälö (2.19) liittävät arvopaperien hinnat niiden tuottoihin ja marginaaliseen korvaavaan hintaan toimijan hetkien 0 ja 1 kulutuksien välillä. Tasapainossa nämä ehdot toteutuvat kaikille toimijoille. Kulutukseen perustuva CAP-mallin rajattu versio saadaan johdettua, kun toimijoiden utiliteettifunktiot ovat kvadraattisia Neumann-Morgernstern muotoisia utiliteettifunktiota. Tämän lisäksi esitellään Sharpen suhdeluku, joka mittaa riskipreemion suhdetta riskin kanssa.

5.1 Kulutukseen perustuvasta hinnoittelusta

Käsitellään toimijaa, jonka kulutussuunnitelma voidaan esittää utiliteettifunktion odotusarvon avulla muodossa $\mathbb{E}\left[u(c_0, c_1)\right]$. Tarkemmin, seuraavat kaksi utiliteettia perustuvat Neumann-Morgernstern muotoisiin utiliteettifunktioihin, jotka on määritelty kappaleen kaksi määritelmässä 2.15. Tällöin hetken 0 kulutuksen marginaalinen utiliteetti on $\sum_{s=1}^{S} \pi_s \partial_0 u(c_0, c_1)$ ja vastaavasti tilassa s hetkellä 1 se on $\pi_s \partial_1 u(c_0, c_1)$. Osittaisderivaattojen oletetaan olevan satunnaismuuttujia, joiden realisaatiot ovat muotoa $\partial_1 u(c_0, c_s)$. Olkoon nämä utiliteettifunktiot aikariippumattomia yhtälön (2.14) mukaisesti ja merkitään hetken 0 marginaalista utiliteettia seuraavasti $\mathbb{E}(\partial_0 u)$.

Oletetaan, että optimaalinen kulutus on optimointialueen sisäistä. Tällöin ensimmäisen kertaluvun ehto kulutuspohjaisen portfolion valinnalle saa muodon

$$p_j \mathbb{E}(\partial_0 u) = \mathbb{E}(\partial_1 u x_j) \tag{5.1}$$

jokaiselle arvopaperille j teoreeman 2.1 mukaisesti. Edellinen yhtälö voidaan kirjoittaa käyttäen tuoton määritelmää 2.4 muodossa

$$\mathbb{E}(\partial_0 u) = \mathbb{E}(\partial_1 u r_j). \tag{5.2}$$

Jos riskitön arvopaperi kuuluu sijoituskohteiden avaruuteen, niin kohdan (5.2) mukaan tämä riskitön tuotto on

$$\overline{r} = \frac{\mathbb{E}(\partial_0 u)}{\mathbb{E}(\partial_1 u)}. \tag{5.3}$$

Odotusarvo kahden satunnaismuuttujan y ja z tulolle voidaan kirjoittaa muodossa

$$\mathbb{E}(yz) = \mathrm{cov}(y, z) + \mathbb{E}(y)\mathbb{E}(z). \tag{5.4}$$

Käyttäen tätä tulosta, yhtälö (5.2) saa muodon

$$\mathbb{E}(\partial_0 u) = \mathbb{E}(\partial_1 u)\mathbb{E}(r_j) + \mathrm{cov}(\partial_1 u, r_j) \tag{5.5}$$

ja edelleen riskittömän tuoton avulla muokaten saadaan kulutukseen perustuvan arvopaperihinnoittelun yhtälö.

Määritelmä 5.1 (Kulutukseen perustuvan arvopaperihinnoittelun yhtälö)**.** *Kulutukseen perustuvan arvopaperihinnoittelun yhtälö on muotoa*

$$\mathbb{E}(r_j) = \overline{r} - \frac{cov(\partial_1 u, r_j)}{\mathbb{E}(\partial_1 u)} = \overline{r} - \overline{r}\frac{cov(\partial_1 u, r_j)}{\mathbb{E}(\partial_0 u)} \tag{5.6}$$

Tämän yhtälön avulla jokaisen arvopaperin riskipreemio voidaan liittää osuuteen sen kovarianssista marginaalisen korvaavan hinnan hetkien 0 ja 1 välillä ja tuoton kanssa. Itseasiassa sijoituskohteen riskipreemio perustuu täysin tähän kovarianssiin, joka on siis negatiivinen. Se on siis eräänlainen riskin mittari. Yhtälö (5.6) tarjoaa tasapainotilassa mahdollisuuden tutkia toimijoiden allaolevia marginaalisia korvaavia hintoja, jotka eivät ole markkinoilta suoraan havainnoitavissa. Tarkastellaan näitä lisää seuraavassa alakappaleessa.

Tehdään ensin muutama tulkinta, miten arvopapereiden tuotot liittyvät toimijoiden kulutuksiin. Täysin puhtaasti riskiä kaihtavalle toimijalle $\partial_1 u(c_0, c_1)$ on hetken 1 kulutuksen vähenevä funktio. Siispä arvopaperilla, jolla on korkea voitto, kun kulutus on alhainen ja pieni voitto, kun se on korkea, johtaa siihen, että sen odotustuotto on alhaisempi, kuin riskitön tuotto. Tällaisella arvopaperilla toimija voi suojata kulutukseensa liittyvää riskiä, vaikkakin joutuu tuotto-odotuksiin nähden maksamaan suhteessa korkeamman hinnan. Vastaavasti arvopaperit, joiden oletetaan olevan korreloimattomia marginaalisten korvaavien hintojen kanssa, omaavat odotustuoton, joka vastaa riskitöntä tuottoa. Edelleen sellainen arvopaperi, jonka voitto on korkea, kun kulutus on korkea ja alhainen, kun kulutuskin on alhainen, omaa riskitöntä tuottoa korkeamman odotustuoton.

Marginaalinen korvaava hinta on deterministinen, jos ja vain jos toimijan kulutus on deterministinen tai riskineutraali. Tällöin yhtälö (5.6) johtaa reiluun hinnoitteluun. Kulutukseen perustuva arvopaperihinnoittelu pätee myös mille tahansa portfoliotuotolle

r:

$$\mathbb{E}(r) = \overline{r} - \overline{r}\frac{\operatorname{cov}(\partial_1 u, r)}{\mathbb{E}(\partial_0 u)}. \tag{5.7}$$

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkin avulla yhden agentin toimintaa markkinoilla, hyödyntäen muun muassa kulutukseen perustuvaa arvopaperihinnoittelua. Tässä esimerkissä jatketaan kappaleessa 2 aloitettua esimerkkiä 2.0.1.

Esimerkki 5.0.1. *Tehdään samat oletukset kuin esimerkissä* 2.0.1. *Marginaalinen utiliteetti toimijan hetken 0 kulutukselle on* $\mathbb{E}(\partial_0 u) = 1$. *Vastaavasti, hetkellä 1 toimijan marginaalinen utiliteetti tilan mukaan järjestettynä on* $\mathbb{E}(\partial_1 u) = \frac{11}{20}$, $\mathbb{E}(\partial_1 u) = \frac{11}{40}$ *tai* $\mathbb{E}(\partial_1 u) = \frac{11}{80}$. *Nyt on mahdollista käyttää yhtälöä* (5.1) *hinnoittelemaan arvopaperit. Riskillisten arvopaperien hinnat ovat siis*

$$p_2 = \frac{\mathbb{E}(\partial_1 u x_2)}{\mathbb{E}(\partial_0 u)} = \frac{33}{160}, \qquad p_3 = \frac{33}{40}$$

ja riskittömän arvopaperin hinta on

$$p_1 = \frac{77}{80}.$$

5.2 Sharpen suhdeluku ja versio CAP-mallista

Tutkitaan seuraavaksi markkinoita, kun niillä on määritelty marginaalisen korvaavan hinnan avulla tasapainohinnat. Tehdään huomio, että jos määritelmän 2.6 riskipreemio on aidosti positiivinen, niin toimijoiden ei ole kannattavaa olla puhtaasti riskinkaihtajia. Toinen kappaleen päätuloksista saadaan toimijan hetkien 0 ja 1 marginaalisen korvaavan hinnan keskihajonnalle. Sille on mahdollista johtaa alaraja portfolion instrumenttien odotustuottojen ja niiden keskihajontojen pohjalta. Tämä tunnetaan nimellä Sharpen suhdeluku.

Määritelmä 5.2 (Sharpen suhdeluku)**.** *Yhtälöistä* (5.2) *ja* (5.3) *seuraa, että*

$$\mathbb{E}\left[\partial_1 u(r_j - \overline{r})\right] = 0. \tag{5.8}$$

Olkoon ρ *korrelaatiokerroin termien* $\partial_1 u$ *ja* $r_j - \overline{r}$ *välillä määrätty yhtälöllä*

$$\rho = \frac{\mathbb{E}\left[\partial_1 u(r_j - \overline{r})\right] - \mathbb{E}(\partial_1 u)\mathbb{E}(r_j - \overline{r})}{\sigma(\partial_1 u)\sigma(r_j)}, \tag{5.9}$$

jossa σ *merkitsee keskihajontaa. Tämä on standardisoitu jakamalla keskihajontojen tulolla, joten tiedetään että* $|\rho| \leq 1$. *Käyttäen tätä tietoa ja näitä yhtälöitä saadaan*

$$\sigma(\partial_1 u) \geq \frac{\mathbb{E}(\partial_1 u)|\mathbb{E}(r_j) - \overline{r}|}{\overline{r}\sigma(r_j)}. \tag{5.10}$$

Jaetaan nyt yhtälön molemmat puolet termillä $\mathbb{E}(\partial_0 u)$ *ja käytetään yhtälöä* (5.3) *riskittömään tuottoon, saadaan*

$$\sigma\left(\frac{\partial_1 u}{\mathbb{E}(\partial_0 u)}\right) \geq \frac{|\mathbb{E}(r_j) - \overline{r}|}{\overline{r}\sigma(r_j)}. \tag{5.11}$$

Kutsutaan tätä riskipreemion ja tuoton keskihajonnan välistä suhdetta yhtälössä (5.11) *Sharpen suhdeluvuksi.*

Epäyhtälön (5.11) mukaan volatiliteetti kulutuksen marginaaliselle korvaavalle hinnalle hetkien nolla ja yksi välillä tasapainotilassa on suurempi kuin Sharpen suhdeluvun absoluuttinen arvo jokaiselle arvopaperille jaettuna riskittömällä tuotolla. Sharpen suhdeluku on siis termi $\frac{|\mathbb{E}(r_j)-\overline{r}|}{\sigma(r_j)}$. Sharpen suhdeluvun oleellinen ominaisuus on mitata riskipreemion kokoa suhteessa keskihajontaan tai volatiliteettiin. Lienee selvää, että samaa riskipreemiota pienemmällä volatiliteetilla voidaan pitää parempana. Siispä, suhteessa korkeampi Sharpen suhdeluku kahdelle samankaltaiselle sijoituskohteelle on siis parempi.

Sharpen suhdeluku voidaan johtaa myös mille tahansa portfolio tuotolle, pienellä tarkennuksella. Epäyhtälössä (5.11) otetaan supremum kaikkien tuottojen paitsi riskittömän tuoton ylitse, jolloin saadaan seuraava alaraja marginaalisen korvaavan hinnan volatiliteetille:

$$\sigma\left(\frac{\partial_1 u}{\mathbb{E}(\partial_0 u)}\right) \geq \sup_r \frac{|\mathbb{E}(r) - \overline{r}|}{\overline{r}\sigma(r)}. \tag{5.12}$$

Esimerkissä 4.1.3 näytettiin, miten ideaali tilanteessa hajauttamalla päästiin kokonaan eroon riskistä. Siinä luodun portfolion volatiliteetti on siis nolla. Hyödyntäen hajauttamisen vaikutusta portfoliolle luodaan kappaleen tulosten pohjalta ensimmäinen versio CAP-mallista. Siinä rajoitutaan käsittelemään toimijoita, joiden Neumann-Morgenstern utiliteettifunktiot 2.15 ovat kvadraattisia hetken 1 kulutukselle.

Määritelmä 5.3. *Toimijan i utiliteetifunktio on kvadraattinen von Neumann-Morgernsternin utiliteettifunktio, jos se on muotoa*

$$u^i(c_0, c_s) = u_0^i(c_0) + u_1^i(c_s) = u_0^i(c_0) - (c_s - \alpha^i)^2 \tag{5.13}$$

kun $c_s \leq \alpha^i$ *ja* u_0 *on jokin utiliteettifunktio hetken 0 kulutukselle.*

Tällöin toimijan i hetken 1 marginaalinen utiliteetti $\partial_1 u^i$ on

$$\partial_1 u^i = 2(\alpha - c_1). \tag{5.14}$$

Kulutukseen perustuvan arvopaperihinnoittelun yhtälö (5.6) saa muodon

$$\mathbb{E}(r_j) = \overline{r} + \frac{\text{cov}(c_1, r_j)}{\alpha - \mathbb{E}(c_1)}, \tag{5.15}$$

kun markkinoiden toimijoiden utiliteettifunktiot ovat määritelmän 5.3 mukaiset.

Teoreema 5.1. *Oletetaan, että arvopaperimarkkinoilla $\mathcal{M}$ on riskitön sijoituskohde, toimijoiden utiliteettifunktiot ovat kvadraattisia ja että kokonaispääoma kuuluu sijoituskohteiden avaruuteen. Tämä kokonaispääoma on siis joidenkin sijoituskohteiden tuottama voitto, jota kutsutaan markkinavoitoksi ja merkitään sen tuottoa r_m. Yhtälö* (5.15) *pätee portfoliotuotoille, kuten todettiin yhtälössä* (5.7)*. Erityisesti, se pätee markkinaportfolion tuotolle*

$$\mathbb{E}(r_m) = \bar{r} + \frac{cov(c_1, r_m)}{\alpha - \mathbb{E}(c_1)}. \tag{5.16}$$

Oletetaan vielä, että markkinatuoton riskipreemio eroaa nollasta. Tällöin voidaan siirtää yhtälöissä (5.15) *ja* (5.16) *riskitön tuotto $\bar{r}$ vasemmalle puolelle ja jakaa ensimmäisen yhtälö jälkimmäisellä, jolloin päädytään yhtälöön*

$$\frac{\mathbb{E}(r_j) - \bar{r}}{\mathbb{E}(r_m) - \bar{r}} = \frac{cov(r_m, r_j)}{var(r_m)}. \tag{5.17}$$

Merkitään $\beta_j = \frac{cov(r_m, r_j)}{var(r_m)}$. Voimme nyt kirjoittaa arvopaperimarkkinasuoran yhtälön muodossa

$$\mathbb{E}(r_j) = \bar{r} + \beta_j \left(\mathbb{E}(r_m) - \bar{r}\right). \tag{5.18}$$

Verrataan tämän teoreeman arvopaperimarkkinasuoraa kappaleessa 4.2 määriteltyyn beta-relaatioon (4.16). Tällöin β-kerroin määriteltiin portfoliolle yhtälössä 4.18 muodossa $\beta = \frac{\mathrm{cov}(r, r_\lambda)}{\mathrm{var}(r_\lambda)}$ ja portfolion tuotto yhtälöllä (4.17). Beta-relaatiossa (4.17) käytettiin siis riskipreemion sijasta rintamatuoton korreloimattoman parin ja riskittömän tuoton erotusta, sekä vastaavasti beta-kertoimessa rintamatuoton korreloimatonta paria markkinatuoton sijasta. Kappaleen 6 määritelmässä 6.3 markkinatuotto tullaan määrittelemään rintamatuotoksi. Tämä luo siis yhteyden teoreeman 5.1 ja kappaleen 4.2 beta-hinnoittelun välille.

Kappaleen 6 yhteydessä CAP-mallin vaatimia oletuksia tullaan keventämään, kun arvopaperimarkkinasuora johdetaan määritelmässä 6.4. Markkinavoiton ja -tuoton määrittelystä on myös tarkemmin kohdassa 6.1.

6 Capital Asset Pricing-Malli

6.1 CAP-Malli

Kohdassa 4.2 todetaan beta-hinnoittelun avulla, että määritelmän 2.6 mukainen riskipreemio mille tahansa sijoituskohteelle tai portfoliolle on verranollinen sen tuoton kovarianssiin rintamatuoton kanssa. Tämä ei kuitenkaan ota kantaa siihen, mitkä tuotoista ovat rintamatuottoja. Kappaleessa laajennetaan ensiksi pääoman käsitettä arvopaperiavaruuden ulkopuolelle sekä tarkastellaan markkinoita kokonaisuutena. Tämän jälkeen

CAP-malli määritellään tässä työssä tasapainotilaisten sijoituskohteiden tuottojen ominaisuutena, eikä arvopaperimarkkinoita kuvaavana mallina, kuten yleensä erityisesti taloustieteen puolella. Kappaleessa tullaan siis käymään läpi vaatimukset arvopaperimarkkinoille, toimijoiden preferensseille ja tuottoille, jotka määrittelevät tämän tasapainotilan, jossa CAP-malli pätee.

Otetaan mukaan arvopaperiavaruuden ulkopuolella olevan pääoman, jolloin jokaisen toimijan i hetken 1 pääoma w_1^i voidaan jakaa kahden ortogonaalisen tekijän summaksi. Käyttäen yhtälön (3.7) odotusarvon sisätuloa projektoimme termin w_1^i arvopaperiavaruuteen $\mathcal{M}$ erottaaksemme pääomasta markkinoilla vaihdettavan osuuden $w_{1,\mathcal{M}}^i$ vaihtamattomasta osuudesta $w_{1,\mathcal{N}}^i$. Vaihtamattomissa oleva osuus $w_{1,\mathcal{N}}^i$ on siis ortogonaalinen arvopaperiavaruuden $\mathcal{M}$ kanssa. Matemaattisesti ilmaistuna

$$w_1^i = w_{1,\mathcal{M}}^i + w_{1,\mathcal{N}}^i, \tag{6.1}$$

missä $w_{1,\mathcal{M}}^i \in \mathcal{M}$ on markkinoilla vaihdettavissa oleva osa toimijan i portfoliosta ja $w_{1,\mathcal{N}}^i \in \mathcal{M}^\perp = \mathcal{N}$ ei ole. Projektioteoreema 3.2 takaa, että tämän jaon kanssa ei tule ongelmia yksikäsitteisyyden kanssa. Vastaavasti markkinoiden kokonaispääomalle hetkellä 1 pätee

$$\overline{w}_1 = \overline{w}_{1,\mathcal{M}} + \overline{w}_{1,\mathcal{N}}. \tag{6.2}$$

Määritellään näihin pohjautuen, markkinavoitto m ja markkinatuotto r_m.

Määritelmä 6.1 (Markkinavoitto). *Markkinavoitto m on kokonaispääomasta vaihdettavissa oleva osa, eli*

$$m = \overline{w}_{1,\mathcal{M}}. \tag{6.3}$$

Määritelmä 6.2 (Markkinatuotto). *Markkinatuotto r_m on markkinavoitto m jaettuna tasapainohinnalla, jonka oletetaan olevan eri suuri kuin nolla, eli*

$$r_m = \frac{m}{q(m)}, \tag{6.4}$$

missä $q(m)$ on määritelmän 3.15 *hinnoittelufunktionaali.*

Markkinatuoton avulla päästään määrittelemään tämän työn CAP-malli.

Määritelmä 6.3. *Käytämme termiä Capital Asset Pricing Malli silloin, kun markkinatuotto on rintamatuotto.*

Markkinatuotto r_m on siis rintamatuotto, suoraan CAP-mallin määritelmän perusteella. Oletetaan, että r_m ei ole minimivarianssin omaava tuotto. Tällöin kappaleen 4.2 perusteella on olemassa toinen rintamatuotto r_{m0}, jonka kovarianssi r_m kanssa on nolla. Käytetään näitä kahta tuottoa betahinnoittelun yhtälössä (4.14).

Koska CAP-mallissa markkinatuotto on määritelmän 4.1 rintamatuotto, voimme ottaa sen referenssiportfolioksi betahinnoitteluyhtälössä (4.14), jolloin saamme muodostettua arvopaperimarkkinasuoran. Tämän suoran keskeinen ominaisuus on liittää mielivaltaisen sijoituskohteen riskipreemio sen tuoton kovarianssiin määritelmän 6.2 markkinatuoton kanssa.

Määritelmä 6.4 (Arvopaperimarkkinasuoran yhtälö)**.** *Oletetaan, että markkinatuotto sijaitsee odotusarvorintamalla. Tällöin suoran yhtälö*

$$\mathbb{E}(r_j) = \mathbb{E}(r_{m0}) + \beta_j[\mathbb{E}(r_m) - \mathbb{E}(r_{m0})] \tag{6.5}$$

pätee jokaiselle sijoituskohteelle j*, missä* $\beta_j = \frac{cov(r_j, r_m)}{var(r_m)}$.

Erityisesti, jos riskitön sijoituskohde sijaitsee arvopaperiavaruudessa, niin $r_{m0} = \overline{r}$, eli on siis riskitön, jolloin yhtälö (6.5) saa muodon

$$\mathbb{E}(r_j) = \overline{r} + \beta_j[\mathbb{E}(r_m) - \overline{r}]. \tag{6.6}$$

Se ei ole siis välttämätöntä, että riskitön sijoituskohde sijaitsee arvopaperiavaruudessa $\mathcal{M}$, kuten kappaleen 5 tapauksessa. Suoran yhtälö (6.5) laajenee, kuten aiemminkin, portfolio tuotoille. Tällöin termien r_j ja β_j tilalle vaihdetaan r ja β, jolloin yhtälö saa muodon

$$\mathbb{E}(r) = \mathbb{E}(r_{m0}) + \beta[\mathbb{E}(r_m) - \mathbb{E}(r_{m0})], \tag{6.7}$$

missä β on markkinatuoton r regressiokerroin. Markkinatuotolle pätee $\beta = 1$, jolloin nolla kovarianssiparin tuoton r_{m0} beta-kerroin $\beta = 0$.

6.2 Toimijoiden preferensseistä

Tämän kappaleen alkupuolella esiteltiin CAP-malli, mutta ei juuri otettu kantaa siihen minkälaisilla oletuksilla sen tiedetään kuvaavan markkinoita. Kappaleen loppupuolella puhutaan toimijoiden preferensseistä ja siitä mikä vaikutus niillä on CAP-mallin tasapainotilan voimassaolon kannalta. Tämän lisäksi esitellään erikoistapauksena markkinat, joiden voitot noudattavat moniuloitteista normaalijakaumaa, ja todistetaan, että CAP-malli on myös niillä voimassa. Työssä määritelty äärellisuloitteinen tila-avaruus ei ole itseasiassa riittävä täyttämään normaalijakauman vaatimuksia. Hilbertin avaruudet laajenevat äärettömuloitteisiksi kuitenkin kohtuullisen helposti, joten esitellään tämä tulos siitä huolimatta.

Määritelmä 6.5. *Toimijalla on odotusarvohakuiset preferenssit, jos tämän utiliteettifunktio* $u(c_0, c_1)$ *on aidosti kasvava ja voidaan kirjoittaa muodossa*

$$u(c_0, c_1) = u_0(c_0) + f(\mathbb{E}(c_1), var(c_1)), \tag{6.8}$$

joillekin funktioille $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ja* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Tällöin toimijoiden preferenssit ovat ajasta riippumattomia määritelmän 2.14 mukaisesti. Itseasiassa ne riippuvat ainoastaan hetken 1 kulutussuunnitelman odotusarvosta ja varianssista. Toimija mittaa siis riskiään puhtaasti varianssin avulla ja funktio f kuvaa, miten varianssi vaikuttaa toimijan näkemyksiin riskistä.

Määritelmä 6.6. *Toimija, jolla on odotusarvohakuiset preferenssit, on aidosti riskin kaihtaja, jos yhtälössä* (6.8) f *on aidosti vähenevä varianssin suhteen.*

Perinteisesti esimerkiksi vakuutusyhtiöt ja eläkesäästäjät ovat olleet tämän tyyppisiä sijoittajia. Viime vuosina velkakirjojen, erityisesti riskittömien, korot ovat olleet historiallisesti matalat tai jopa negatiiviset. Tämä on ohjannut näitä mainittuja toimijoita varianssin näkökulmasta riskillisempien portfolioiden suuntaan, koska aito riskinkaihtaminen ei ole ollut tuottotavoiden valossa mahdollista.

Seuraavassa teoreemassa osoitetaan markkinoilla pätevän CAP-mallin edellyttämä tasapaino, kunhan toimijoiden utiliteettifunktiot ovat sopivat. Tämä oletus on, että markkinoiden kaikilla toimijoilla on odotusarvohakuiset preferenssit ja he ovat aidosti riskinkaihtajia määritelmien 6.5 ja 6.6 mukaisesti.

Teoreema 6.1. *Jos markkinoiden kaikilla toimijoilla on odotusarvohakuiset preferenssit ja he ovat aidosti riskin kaihtajia, niin tällöin tasapainotilassa markkinatuotto on rintamatuotto.*

Todistus. Olkoon c_1^i tasapainotilan hetken 1 kulutussuunnitelma toimijalle i. Voimme hajottaa tämän kulutussuunnitelman c_1^i, kuten pääoman aiemmin kohdassa 6.1, markkinoilla vaihdettavissa olevaan ja vaihtamattomissa olevaan osaan. Tällöin

$$c_1^i = c_{1,\mathcal{M}}^i + c_{1,\mathcal{N}}^i, \tag{6.9}$$

missä $c_{1,\mathcal{M}}^i \in \mathcal{M}$ ja $c_{1,\mathcal{N}}^i \in \mathcal{N}$.

Riittää näyttää, että vaihdettavissa oleva osa $c_{1,\mathcal{M}}^i$ toimijan hetken 1 kulutussuunnitelmasta sijaitsee rintamalla $\mathcal{E}$, koska jos tämä pätee, niin myös vaihdettavissa oleva osa kokonaiskulutusta on rintamavoitto. Mutta vaihdettavissa oleva osa kokonaiskulutusta on yhtä suuri kuin vaihdettavissa oleva osa kokonaispääomasta, joka on määritelmältään jo markkinavoitto. Siispä markkinatuotto on rintamatuotto.

Näyttääksemme, että $c_{1,\mathcal{M}}^i$ kuuluu $\mathcal{E}$, hajotamme $c_{1,\mathcal{M}}^i$ osiin, projektoimalla sen rintamalle $\mathcal{E}$ siten, että

$$c_{1,\mathcal{M}}^i = c_{1,\mathcal{E}}^i + c_{1,\mathcal{I}}^i, \tag{6.10}$$

missä $c_{1,\mathcal{E}}^i \in \mathcal{E}$ on rintamaosuus ja $c_{1,\mathcal{I}}^i \in \mathcal{E}^\perp$ on se osa $c_{1,\mathcal{M}}^i$:stä, joka on ortogonaalinen rintaman $\mathcal{E}$ kanssa. Aliavaruus $\mathcal{E}^\perp$ on siis rintaman $\mathcal{E}$ ortogonaalinen komplementti avaruudessa $\mathcal{M}$.

Oletetaan, että päinvastainen pätee, siis että $c^i_{1,\mathcal{M}}$ ei sijaitse rintamalla ja täten jollekin toimijalle i pätee $c^i_{1,\mathcal{N}} \neq 0$. Tarkastellaan vaihtoehtoista hetken 1 kulutussuunnitelmaa, jonka seuraava yhtälö antaa

$$\overline{c}^i_1 = c^i_{1,\mathcal{E}} + c^i_{1,\mathcal{N}} \tag{6.11}$$

Huomataan, että $\overline{c}^i_1 = c^i_1 - c^i_{1,\mathcal{I}}$. Koska toimijan utiliteettifunktio on aidosti kasvava, niin optimaalinen kulutus täyttää määritelmän 2.16 budjettivaatimuksen yhtälönä, jolloin $c^i_1 - w^i_1 \in \mathcal{M}$. Käyttäen tietoa $\overline{c}^i_1 - w^i_1 = c^i_1 - w^i_1 - c^i_{1,\mathcal{I}}$, voidaan todeta, että

$$\overline{c}^i_1 - w^i_1 \in \mathcal{M}, \tag{6.12}$$

jolloin kulutussuunnitelma $\overline{c}^i_1$ voidaan saavuttaa nettokaupalla portfolioallokaation (2.21) mukaisesti.

Määritelmän 4.1 mukaan tasapainoinen hinnoitteluydin k_q sijaitsee rintamalla $\mathcal{E}$. Siispä, seuraava yhtälö pätee

$$q(c^i_{1,\mathcal{I}}) = \mathbb{E}\left(k_q c^i_{1,\mathcal{I}}\right) = 0 \tag{6.13}$$

ja nettokaupalla $\overline{c}^i_1 - w^i_1$ on sama hinta kuin $c^i_1 - w^i_1$, joka on $q(\overline{c}^i_1 - w^i_1) = q(c^i_1 - w^i_1)$. Tämän ja yhtälön (6.12) perusteella hetken 0 ja 1 kulutussuunnitelmat $\overline{c}^i_0$ ja c^i_1 täyttävät toimijan i budjettivaatimuksen.

Koska odotusarvoydin sijaitsee myös rintamalla $\mathcal{E}$ määritelmän 4.1 perusteella, seuraava yhtälö pätee

$$\mathbb{E}(c^i_{1\mathcal{I}}) = \mathbb{E}(k_e c^i_{1\mathcal{I}}) = 0. \tag{6.14}$$

Siispä $\overline{c}^i_1$ ja c^i_1 omaavat saman odotusarvon. Lisäksi, koska $c^i_{1,\mathcal{E}}$, $c^i_{1,\mathcal{I}}$ ja $c^i_{1,\mathcal{N}}$ ovat keskenään ortogonaaliset ja $\mathbb{E}(c^i_{1,\mathcal{I}}) = 0$, niiden keskinäiset kovarianssit ovat nollaa. Käyttäen yhtälöä (6.11) saadaan $\mathrm{cov}(\overline{c}^i_1, c^i_{1\mathcal{I}}) = 0$ ja edelleen

$$\mathrm{var}(c^i_1) = \mathrm{var}(\overline{c}^i_1) + \mathrm{var}(c^i_{1\mathcal{I}}) > \mathrm{var}(\overline{c}^i_1), \tag{6.15}$$

missä aito epäyhtälö seuraa oletuksesta $c^i_{1\mathcal{I}} \neq 0$.

Kulutussuunnitelma $\overline{c}^i_1$ omaa siis pienemmän varianssin kuin $c^i_{1\mathcal{I}}$ vaikka niiden odotusarvo on sama. Agentin preferenssien perusteella kulutussuunnitelma $\overline{c}^i_1$ valitaan siis puhtaasti suunnitelman $c^i_{1\mathcal{I}}$ ylitse, mikä on kontradiktio oletukselle $c^i_{1\mathcal{I}}$:n optimaalisuudesta. Siispä vaihdettavissa oleva osa jokaisen toimijan tasapainoisesta kulutuksesta $c^i_{i\mathcal{M}}$ sijaitsee rintamalla. Edelleen, koska markkinavoitto on juurikin termit $c^i_{i\mathcal{M}}$ summattuna toimijoiden ylitse, markkinatuotto on siis myös rintamatuotto.

□

Todistuksessa näytettiin myös, että toimijan hetken 1 tasapainoisen kulutussuunnitelman vaihdettavissa oleva osa $w^i_{1,\mathcal{M}}$ sijaitsee odotusarvorintamalla, kunhan toimijalla on odotusarvohakuiset preferenssit.

Tarkastellaan vielä erotusta $c^i_1 - w^i_1 \in \mathcal{M}$ yhtälöiden (6.1) ja (6.2) avulla. Näiden mukaan pätee $c^i_{1\mathcal{N}} = w^i_{1\mathcal{N}}$. Jos riskitön tuotto sijaitsee sijoituskohteiden avaruudessa, niin termin $c^i_{1\mathcal{N}}$ odotusarvo on nolla, koska se on ortogonaalinen sijoituskohteiden avaruuden $\mathcal{M}$ kanssa. Siispä, hetken 1 tasapainoiselle kulutussuunnitelmalle pätee tällöin yhtälö

$$c^i_1 = c^i_{1\mathcal{M}} + w^i_{1\mathcal{N}}, \quad \text{kun } c^i_{1\mathcal{M}} \in \mathcal{E}. \tag{6.16}$$

Tällä perusteella tasapainoisen kulutussuunnitelman vaihtamattomissa oleva osa vastaa kokonaiskulutuksen vaihtamattomissa olevaa osaa.

Olkoon $w^i = w^i_0 + q(w^i_{1\mathcal{M}})$ toimijan hetken nolla varallisuus, joka koostuu tämän hetken nolla pääomasta ja hetken 1 pääoman vaihdettavissa olevasta arvosta, jonka hinnoittelufunktionaali q siis arvostaa. Koska odotusarvorintaman virittävät markkinatuotto r_m ja tämän kanssa korreloimaton tuotto r_{m0}, niin vaihdettavissa oleva osa hetken 1 tasapainoista kulutussuunnitelmaa voidaan kirjoittaa muodossa

$$c^i_{1\mathcal{M}} = a^i r_m + (w^i - c^i_0 - a^i) r_{m0}, \tag{6.17}$$

missä a^i on se osuus hetken nolla varallisuudesta, joka on sijoitettu markkinaportfolioon.

Aiemmin todettiin kappaleessa 4.2, että jos markkinoilta löytyy riskitön tuotto, niin juurikin se on korreloimaton tuottopari sijoituskohteillemme, eli siis $\bar{r} = r_{m0}$. Tällöin odotusarvo ja varianssi hetken 1 tasapainoiselle kulutussuunnitelmalle voidaan kirjoittaa muodoissa

$$\mathbb{E}(c^i_1) = (w^i - c^i_0)\bar{r} + a^i \left[\mathbb{E}(r_m - \bar{r})\right] \tag{6.18}$$

ja

$$\operatorname{var}(c^i_1) = (a^i)^2 \operatorname{var}(r_m) + \operatorname{var}(w^i_{1\mathcal{N}}), \tag{6.19}$$

käyttäen hyväksi yhtälöitä (6.16) ja (6.17).

Oletetaan, että kulutussuunnitelma on optimointialueen sisällä ja sen varianssi on aidosti positiivinen. Tällöin tasapainoinen sijoitus a^i ja kulutussuunnitelma c^i toteuttavat seuraavat ensimmäisen kertaluvun ehdot teoreeman 2.1 mukaisesti

$$u_0^{'} = \bar{r}\delta_{\mathbb{E}} f \tag{6.20}$$

ja

$$a^i = -\frac{(\mathbb{E}(r_m) - \bar{r})\delta_{\mathbb{E}} f}{2var(r_m)\delta_v f}, \tag{6.21}$$

jotka on maksimoitu termien c^i_0 ja a^i suhteen. Nämä on saatu ylläolevista odotusarvon (6.18), varianssin (6.19), sekä utiliteettifunktion (6.8) yhtälöistä. Termit $\delta_{\mathbb{E}} f$ ja $\delta_v f$ ovat

f:n osittaisderivaatat, ensimmäisen ja toisen argumentin suhteen, tasapainoiselle hetken 1 kulutukselle ja termi $u_0^{'}$ on utiliteettifunktion u_0:n derivaatta hetken 0 tasapainoiselle kulutukselle.

Yhtälön (6.20) mukaan hetken 0 kulutuksen ja hetken 1 kulutuksen odotusarvon välinen marginaalinen korvaava hinta vastaa riskitöntä tuottoa. Vastaavasti yhtälö (6.21) yhdistää tasapainoisen sijoituksen markkinaportfolioon riskipreemion ja markkinatuoton varianssin kanssa, sekä myös marginaaliseen korvaavaan hintaan odotustuoton ja tuoton varianssin välillä.

Oletetaan, että jokaisella toimijalla on määritelmien 6.5 ja 6.6 mukaisesti odotusarvohakuiset preferenssit ja ovat aidosti riskinkaihtaja. Tällöin, jos tällaisen toimijan optimaalinen kulutus ei ole täysin riskitön, niin nämä omaavat riskipreemion 2.6 kanssa saman merkkisen osuuden markkinaportfoliosta. Lienee selvää, että sen tulee olla positiivinen, jotta markkinaportfolioon on kannattavaa sijoittaa, eli siis $\mathbb{E}(r_m) > \overline{r}$.

Edelleen, kaikkien toimijoiden sijoitukset markkinaportfolioon ovat joko nollaa tai aidosti positiivista. Tälloin odotustuotto tasapainoiselle sijoituskohteelle on suurempaa tai yhtä suurta kuin riskitön tuotto. Toimijoiden tuotot tasapainoisille sijoituksille ovat siis määritelmältään odotusarvoisesti tehokkaita ja portfoliot vastaavat siis erotusta ylläkuvatun portfolion ja sen portfolion, joka generoi osuuden $w^i_{1\mathcal{M}}$, välillä.

6.3 CAP-mallin voimassaolosta

Kappaleessa 5.2 esiteltiin CAP-mallin ensimmäinen versio 5.1, joka oli kulutuspohjainen. Sen yhteydessä näytettiin, että tämä CAP-malli on voimassa sopivin oletuksin, erityisesti silloin, kun riskitön tuotto kuuluu sijoituskohteiden avaruuteen $\mathcal{M}$ ja toimijoiden Neumann-Morgernstern utiliteettifunktiot 2.15 ovat kvadraattiset. Tässä kappaleessa esitellään kaksi tapausta, joissa CAP-mallin toinen versio 6.1 pätee. Ensimmäisessä tapauksessa näytetään, että toinenkin CAP-malli on voimassa, kunhan toimijoiden utiliteettifunktiot ovat vastaavanlaiset. Toisessa tapauksessa tutkitaan CAP-mallin voimassaoloa sijoituskohteiden voittojen jakauman kautta.

Teoreema 6.2 (Kvadraattinen utiliteetti)**.** *Olkoon toimijan preferensseillä odotusarvoisen utiliteetin esitys kvadraattisella von Neumann-Morgernstern utiliteettifunktiolla määritelmän* 5.3 *mukaisesti. Tällöin kulutuksen* (c_0, c_1) *odotusarvoinen utiliteetti on*

$$\mathbb{E}\left[u^i(c_0, c_1)\right] = u^i_0(c_0) - \left[var(c_1) + (\mathbb{E}(c_1 - \alpha^i))^2\right] \tag{6.22}$$

ja se riippuu ainoastaan termistä c_0*, sekä termin* c_1 *odotusarvosta ja varianssista. Siispä toimijoilla on odotusarvohakuiset preferenssit ja ovat riskinkaihtajia varianssin suhteen. Teoreema* 6.1 *on tällöin voimassa.*

Toimjoiden utiliteettifunktioiden kvadraattinen von Neumann-Morgernstern esitys on siis keskeisessä asemassa CAP-mallin voimassaoloa tutkittaessa. Ne tarjoavat mahdollisuuden todistaa molempien CAP-mallin versioiden, 5.1 ja 6.1, voimassaolo.

Toisessa tapauksessa oletetaan, että arvopapereiden voitot ja toimijoiden hetken 1 pääomat noudattavat moniuloitteista normaalijakaumaa.

Korollaari 6.2.1 (Normaalijakautuneet voitot). *Oletetaan, että arvopapereiden voitot sekä toimijoiden hetken 1 pääomat noudattavat moniuloitteista normaalijakaumaa ja toimijat ovat riskinkaihtajia. Tällöin teoreema* 6.1 *pätee.*

Todistus. Toimijoiden utiliteettifunktiot riippuvat ainoastaan hetken 0 kulutuksesta c_0 ja hetken 1 kulutussuunnitelman c_1 odotusarvosta ja varianssista, koska normaalijakauma on karakterisoitavissa sen odotusarvon ja varianssin perusteella. Toimijalla on määritelmän 6.5 odotusarvohakuiset preferenssit, kun sen utiliteettifunktio on ajasta riippumaton määritelmän 2.14 mukaisesti ja aidosti kasvava.

Erityisesti, jos toimijan preferensseillä on odotusarvoisen utiliteetin esitys ajasta riippumattomalla von Neumann-Morgernstern utiliteettifunktiolla 2.15, niin odotusarvohakuinen esitys saadaan silloin, kun arvopapereiden voitot ja tämän hetken 1 pääoma noudattavat moniuloitteista normaalijakaumaa. Tämän toteamiseksi pidetään tunnettuna sitä, että jos kaksi satunnaismuuttujaa ovat normaalijakautuneita, niin se, jonka varianssi on aidosti suurempi, on myös aidosti riskillisempi. Siispä teoreema 6.1 pätee, kun arvopapereiden voitot sekä toimijoiden hetken 1 pääomat noudattavat moniuloitteista normaalijakaumaa ja toimijat ovat riskinkaihtajia. □

Sijoituskohteiden voittojen normaalia jakautumista voi perustella keskeisellä raja-arvolauseella. Tämä ei tosin päde kaikille sijoituskohteille, kuten optioille, koska niiden tappiot ovat rajoitetut. Toisin sanoen option mahdollinen tappio on rajattu option hintaan, mutta sen mahdolliset voitot ovat mahdollisesti lähes rajattomat, joten ne eivät voi olla normaalijakautuneet.

Tämäkin korollaari vaatii CAP-mallin voimassaololle oletuksen siitä, että markkinoiden toimijat ovat riskinkaihtajia. Kuten toimijoiden odotusarvohakuisten preferenssien 6.5 määrittelyn jälkeen todettiin, tämä on hiukan ongelmallinen oletus nykymarkkinoilla.

7 Faktorihinnoittelu

7.1 Faktorit

CAP-mallissa beta-kerroin mittaa sijoituksen tuoton riippuvuutta markkinatuotosta. Arvopaperimarkkinasuoran teoreemassa 6.4 totesimme, että riskipreemion 2.6 ja betakertoimen 4.15 välinen suhde on lineaarinen. Käydään tässä kappaleessa läpi arvopaperimarkkinoiden toista mallia, joka on samankaltainen kuin määritelty CAP-malli 6.3. Faktorihinnoittelun oletukset markkinoista tai niiden toimijoista ovat kevyemmät kuin

CAP-mallilla. Yksinkertaistettuna markkinatuotto 6.2 korvataan faktorilla tai faktoreilla arvopaperimarkkinasuoran yhtälössä 6.4. Faktorin 7.2 voidaan tulkita edustavan todellisuudessa sen kaltaisia makroekonomisia käsitteitä, kuten keskuspankin ohjauskoron, inflaation, valuutan arvon, työllisyysasteen tai bruttokansantuotteen kehitystä. Täkeimpinä tuloksina näytetään, että odotusarvoinen tuotto ja sen herkkyys arvopaperin faktoririskin kanssa on myös lineaarinen, ja esitellään markkinoiden faktoristruktuuri.

Määritellään ensiksi ehdollisten vaateiden avaruus ja vaateet, joita määritelmän 7.2 faktorit ovat.

Määritelmä 7.1 (Vaade). *Merkitään termillä e_s ehdollisten vaateiden avaruuden $\mathbb{R}^S$ s:nettä kantavektoria. Vektori e_s saa siis tilassa s arvon yksi ja nolla muualla. Tätä kutsutaan tilan s vaateeksi.*

Tämä e_s siis edustaa yhtä yksikköä kulutusta, kunhan tila s on saavutettu hetkellä 1. Näiden voidaan käytännössä tulkita olevan lähellä reaalimaailman optioita. Todetaan, että jos markkinat ovat täydelliset ja markkinoiden hinnat ovat yksikäsitteiset, niin hinnoittelufunktionaali 3.15 hinnoittelee myös kantavektorit e_s yksikäsitteisesti. Jokainen ehdollinen vaade $z \in \mathbb{R}^S$ on hinnoiteltavissa hinnoittelufunktionaalilla, käyttäen hyväksi kantavektoreiden e_s lineaarisuutta. Näihin konsepteihin voi tutustua lisää kirjan Princibles of Financial Economics [1] kappaleesta 2.5.

Määritelmä 7.2 (Faktorit). *Olkoon markkinoilla K kappaletta ehdollisia vaateita $f_1, ..., f_K$, joita kutsutaan faktoreiksi, ja jotka kuuluvat ehdollisten vaateiden avaruuteen $\mathbb{R}^S$. Jokainen faktori on normalisoitu siten, että sen odotusarvo on nolla. Olkoon faktoreiden määrä markkinoilla pieni suhteessa mahdollisten sijoituskohteiden määrään. Faktorit voivat mahdollisesti sijaita arvopaperiavaruudessa.*

Typiillisesti faktoreilla viitataan derivatiiveihin, joiden arvo riippuu jostakin "alla olevasta"sijoituskohteesta tai epävarmasta tulevaisuuden tapahtumasta. Riskitön vaade e vastaa siinä mielessä riskitöntä sijoituskohdetta, että se ei ole riippuvainen hetkellä 1 saavutetusta tilasta.

Määritelmä 7.3 (Faktoriavaruus). *Faktorit ja riskitön vaade e virittävät faktoriavaruuden.*

$$\mathcal{F} = span\{e, f_1, ..., f_K\} \tag{7.1}$$

Faktoreiden ja riskitömän vaateen oletetaan olevan lineaarisesti riippumattomia.

Määritelmä 7.4 (Faktorikerroin). *Käyttäen odotusarvon sisätuloa* (3.7)*, projektoidaan jokaisen arvopaperin voitto x_j faktoriavaruuteen, jolloin päästään seuraavaan hajotelmaan:*

$$x_j = \mathbb{E}(x_j) + \sum_{k=1}^{K} b_{jk} f_k + \delta_j \tag{7.2}$$

jokaiselle j, missä δ_j on riippumaton termeistä f_k ja sen odotusarvo on nolla. Termejä b_{jk} kutsutaan voiton x_j faktorikertoimiksi. Vastaavasti yhtälö (7.2) *voidaan kirjoittaa tuotoille r_j, kunhan arvopaperien hinnat eroavat nollasta. Tällöin*

$$r_j = \mathbb{E}(x_j) + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} f_k + \epsilon_j, \tag{7.3}$$

missä $\beta_{jk} = b_{jk}/p_j$ ja $\epsilon_j = \delta_j/p_j$. Termiä β_{jk} kutsutaan tuoton r_j faktorikertoimeksi.

Faktorikertoimet b_{jk} ja β_{jk} mittaavat voiton ja tuoton alttiutta faktorille f_k. Huomataan, että jos riskitön vaade ja kaikki faktorit K sijaitsevat arvopaperiavaruudessa, niin tällöin myös residuaali δ_j, tai vastaavasti ϵ_j, kuuluvat arvopaperiavaruuteen. Residuaali δ_j esittää arvopaperin satunnaisheilahtelua ja sitä voi mallintaa esimerkiksi normaalijakautuneen satunnaismuuttujan avulla. Tämä on se osa arvopaperin voiton, tai vaihtoehtoisesti tuottojen, heilahtelua, jota ei voida selittää faktoreiden avulla.

Näytetään seuraavaksi arvopaperien hintojen ja faktorikertoimien välinen yhteys ideaalitilanteessa.

7.2 Eksakti Faktorihinnoittelu

Määritelmä 7.5 (Eksakti faktorihinnoittelu)**.** *Eksakti faktorihinnoittelu pätee, jos arvopaperien hinnat toteuttavat yhtälön*

$$p_j = \mathbb{E}(x_j)\tau_0 + \sum_{k=1}^{K} b_{jk}\tau_k \tag{7.4}$$

kaikilla j, joillekin skalaareille $\tau_0, ..., \tau_K$. Kuten aiemmin, voimme käyttää myös tuottoja tässä määritelmässä. Jaetaan termillä p_j ja järjestellään uudelleen, jolloin

$$\mathbb{E}(r_j) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\gamma_k, \tag{7.5}$$

missä $\gamma_0 = 1/\tau_0$ ja $\gamma_k = -\tau_k/\tau_0$.

Jälkimmäisessä muodossa eksakti faktorihinnoittelu on lineaarinen relaatio odotettujen tuottojen ja tuottojen faktorikertoimien välillä. Jos riskitön vaade ja kaikki K faktoria sijaitsevat arvopaperiavaruudessa, niin eksakti faktorihinnoittelu pätee, kun residuaalin δ_j, tai yhtäpitävästi ϵ_j, hinta on nolla. Tarkemmin, mikäli

$$q(\delta_j) = 0, \tag{7.6}$$

missä q on määritelmän 3.15 hinnoittelufunktionaali.

Edelleen jos riskitön vaade ja kaikki K faktoria ovat määritelmän 2.1 voittoja, niin arvopaperiavaruus voidaan hajottaa seuraavasti $\mathcal{M} = \mathcal{F} + \text{span}\{\epsilon_1, ..., \epsilon_J\}$. Oletuksesta, että jokaisella residuaalilla pätee $\delta_j = 0$, saadaan $k_q \in \mathcal{F}$.

Teoreema 7.1. *Jos hinnoitteluydin k_q sijaitsee faktoriavaruudessa, niin eksakti faktorihinnoittelu*

$$\mathbb{E}(r_j) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\gamma_k \tag{7.7}$$

pätee, kunhan $\gamma_0 = \frac{1}{\mathbb{E}(k_q)}$ ja $\gamma_k = -\frac{\mathbb{E}(k_q f_k)}{\mathbb{E}(k_q)}$.

Todistus. Kertomalla faktorikertoimien yhtälöä (7.3) tuotoille hinnoitteluytimellä ja ottamalla odotusarvon puolittain, saadaan

$$1 = \mathbb{E}(r_j)\mathbb{E}(k_q) + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\mathbb{E}(k_q f_k) + \mathbb{E}(k_q \epsilon_j) \tag{7.8}$$

ja edelleen muokkaamalla

$$\mathbb{E}(r_j) = \frac{1}{\mathbb{E}(k_q)} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\left[-\frac{\mathbb{E}(k_q f_k)}{\mathbb{E}(k_q)}\right] - \frac{\mathbb{E}(k_q \epsilon_j)}{\mathbb{E}(k_q)}. \tag{7.9}$$

Termi ϵ_j on ortogonaalinen hinnoitteluytimen k_q kanssa, koska ydin sijaitsee faktoriavaruudessa $\mathcal{F}$. Tällöin siis $\mathbb{E}(k_q \epsilon_j) = 0$ ja edellinen yhtälö saa muodon

$$\mathbb{E}(r_j) = \frac{1}{\mathbb{E}(k_q)} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\left[-\frac{\mathbb{E}(k_q f_k)}{\mathbb{E}(k_q)}\right] \tag{7.10}$$

Näemme, että eksakti faktorihinnoittelu pätee, kun $\gamma_0 = \frac{1}{\mathbb{E}(k_q)}$ ja $\gamma_k = -\frac{\mathbb{E}(k_q f_k)}{\mathbb{E}(k_q)}$. Edelleen, jos riskitön sijoituskohde on mukana sijoituskohteiden avaruudessa, niin $\mathbb{E}(k_q) = \frac{1}{\overline{r}}$ ja $\gamma_0 = \overline{r}$. □

Lause 7.6. *Oletetaan, että riskitön sijoituskohde sijaitsee sijoituskohteiden avaruudessa. Tällöin hinnoitteluydin sijaitsee faktoriavaruudessa, jos ja vain jos rintamatuottojen taso sisältyy faktoriavaruuteen.*

Todistus. Teoreeman 4.1 mukaan riskitön tuotto ja hinnoitteluydin virittävät rintamatuottojen tason $\mathcal{E}$. Siispä $k_q \in \mathcal{F}$ jos ja vain jos $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. □

Yhdistetään seuraavaksi esitelty faktorihinnoittelu ideaalitilanteessa kappaleen 4.2 betahinnoitteluun.

Teoreema 7.2. *Oletetaan, että on olemassa faktori, joka on normalisoitu rintamatuotto siten, että sen odotusarvo on nolla.*

$$f = r - \mathbb{E}(r) \tag{7.11}$$

Olkoon tämä, mikä tahansa muu rintamatuotto, kuin riskitön tuotto. Oletetaan lisäksi, että riskitön tuotto on mukana sijoituskohteiden avaruudessa. Tällöin faktori f ja riskitön tuotto virittävät rintamatuottojen avaruuden ja hinnoitteluydin sijaitsee faktoria-varuudessa. Teoreeman 7.1 *mukaan eksakti faktorihinnoittelu pätee*

$$\mathbb{E}(r_j) = \overline{r} - \beta_j \overline{r} q(f). \tag{7.12}$$

Koska β_j on tässä kerroin tuoton r_j projektiolle faktoriavaruuteen, niin se on muotoa

$$\beta_j = \frac{cov(r_j, f)}{var(f)} = \frac{cov(r_j, r)}{var(r)}, \tag{7.13}$$

ja on siis sama β_j kuin betakertoimen yhtälössä (4.16). *Kertomalla yhtälöä* (7.11) *termillä k_q ja ottamalla odotusarvon saamme*

$$q(f) = \mathbb{E}(k_q f) = 1 - \frac{\mathbb{E}(r)}{\overline{r}}. \tag{7.14}$$

Voimme käyttää tätä kirjoittaessa yhtälön 7.1 *uudelleen*

$$\mathbb{E}(r_j) = \overline{r} + \beta_j \left[\mathbb{E}(r) - \overline{r}\right]. \tag{7.15}$$

Jälleen päädytään kaavan (4.16) betarelaatioon. Tämä on siis CAP-mallin ja faktorihinnoittelun yhdistävä tekijä. Betarelaatio rintamatuotolle r on siis täysin sama kuin eksakti faktorihinnoittelu yksittäiselle faktorille, jonka odotusarvoinen tuotto on normalisoitu nollaksi. Toisin sanoen, eksakti faktorihinnoittelu antaa yksittäiselle faktorille $f = r_m - \mathbb{E}(r_m)$ yhtälöksi arvopaperimarkkinasuoran yhtälön (6.4).

Tähän asti esitelty faktorihinnoittelu pätee siinä mielessä ideaalitilanteessa, että faktorit selittävät puhtaasti arvopapereiden voittojen, tai vaihtoehtoisesti tuottojen, suhteen faktorikertoimiin, eikä muuta heiluntaa synny residuaalien muodossa. Tämä oletus on kohtuuton todellisilla markkinoilla, käytännössä jo faktoreiden eksakti normalisoiminen on vaikeaa ja todennäköisesti aikariippuvaista. Tästä syystä, esitellään seuraavaksi virhemarginaali tälle eksaktille faktorihinnoittelulle. Sen voi siis tulkita mittaavan kuinka kaukana ollaan ideaalitilanteesta. Eksakti faktorihinnoittelu siis pätee, jos tämä virhe on nolla.

Määritelmä 7.7 (Eksaktin faktorihinnoittelun virhe). *Eksaktin faktorihinnoittelun vir-*

he arvopaperille j on

$$\psi_j = \mathbb{E}(r_j) - \gamma_0 - \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk}\gamma_k, \tag{7.16}$$

missä $\gamma_0 = 1/\mathbb{E}(k_q)$ ja $-\mathbb{E}(k_q f_k)/\mathbb{E}(k_q)$.

Käyttäen yhtälöä (7.9), tämä virhe on mahdollista kirjoitaa muodossa

$$\psi_j = -\frac{\mathbb{E}(k_q \epsilon_j)}{\mathbb{E}(k_q)}. \tag{7.17}$$

Jos riskitön sijoituskohde ja K faktoria sijaitsevat sijoituskohteiden avaruudessa, niin $\epsilon_j \in \mathcal{M}$. Siispä $\mathbb{E}(k_q\epsilon_j) = q(\epsilon_j)$ ja $\psi_j = -\bar{r}q(\epsilon_j)$. Jälkimmäisen yhtälön mukaan faktorihinnoittelun virhe on yhtäsuuri kuin residuaalin ϵ_j hinta kerrottuna riskittömällä tuotolla, kun se on muutettu negatiiviseksi.

Edelleen, koska käytännössä jo tämän faktorivirheenkin laskeminen on haastaava, esitellään tapa laskea yläraja kyseiselle virheelle.

Teoreema 7.3. *Aloitetaan projektoimalla määritelmän* 3.19 *hinnoitteluydin k_q faktoriavaruuteen $\mathcal{F}$, jolloin saadaan seuraavan jaottelu tälle ytimelle*

$$k_q = k_q^{\mathcal{F}} + \eta, \tag{7.18}$$

missä $k_q^{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}$ ja $\eta \in \mathcal{F}^{\perp}$. Residuaalin ϵ_j ortogonaalisuudesta faktoreiden kanssa, saadaan

$$\mathbb{E}(k_q\epsilon_j) = \mathbb{E}(\eta\epsilon_j). \tag{7.19}$$

Nyt Cauchy-Schwartzin epäyhtälö 3.6 *tarjoaa tälle ylärajan, joka on*

$$|\mathbb{E}(k_q\epsilon_j)| \leq ||\eta|| ||\epsilon_j||. \tag{7.20}$$

Käyttäen yhtälöitä (7.17), (7.18) *ja* $\mathbb{E}(\epsilon_j) = 0$*, tämä voidaan muokata muotoon*

$$|\psi_j| \leq \frac{1}{\mathbb{E}(k_q)} ||k_q - k_q^{\mathcal{F}}|| \sigma(\epsilon_j). \tag{7.21}$$

Ylärajan normi $||k_q - k_q^{\mathcal{F}}||$ mittaa hinnoitteluytimen k_q ja faktoriavaruuden $\mathcal{F}$ välistä etäisyyttä. Tämän voi tulkita tarkoittavan, että jos hinnoitteluydin k_q on faktoriavaruuden lähellä, niin faktorihinnoittelun virhe arvopaperille j on pieni. Eksakti faktorihinnoittelu siis pätee silloin, kun hinnoitteluydin sijaitsee faktoriavaruudessa, kuten jo todettiinkin teoreemassa 7.1.

7.3 Faktoristruktuuri

Määritelmä 7.8 (Faktoristruktuuri). *Arvopaperien tuotoilla on faktoristruktuuri faktoreiden $f_1, ..., f_K$ suhteen, jos residuaalit ϵ_j seuraavassa jaotelmassa*

$$r_j = \mathbb{E}(r_j) + \sum_{k=1}^{K} \beta_{jk} f_k + \epsilon_j \tag{7.22}$$

ovat korreloimattomia keskenään, toisin sanoen,

$$\mathbb{E}(\epsilon_i \epsilon_j) = 0, \tag{7.23}$$

kun $i \neq j$ ja tämän lisäksi ne ovat korreloimattomia faktoreiden kanssa ja niiden odotusarvo on nolla. Kutsumme nämä ehdot täyttäviä faktoreita systemaattiseksi riskiksi.

Kun tuotoilla on faktoristruktuuri, nämä faktorit siis vaikuttavat kaikkien arvopaperien tuottoihin. Käytännössä useat makroekonomiset ja geopoliittiset käsitteet kuuluvat tähän kategoriaan. Vastaavasti, residuaalien kohdalla puhutaan idiosynkraattisesta riskistä, koska ne vaikuttavat vain yhteen arvopaperiin ja ovat riippumattomia sekä faktoreista, että muista arvopapereista. Tämä ei ota kantaa siihen, että kumman vaikutus arvopapereiden tuottojen kannalta on merkittävämpi. Voidaan kuitenkin todeta, että hajautushyötyn suojaava vaikutus keskittyy enemmän arvopaperin idiosynkraattisen riskin puolelle. Residuaalien vaatimus (7.23) on oleellinen rajoite arvopapereiden tuotoille ja faktoreille. Yleisesti, arvopapereiden tuottojen projektioiden faktoriavaruuteen ei tarvitse olla keskenään korreloimattomia.

Esimerkiksi massiivisia yritysten verotuksen muutoksia, keskuspankin rajoittavaa rahapolitiikkaa tai korkeaa inflaatiota voidaan pitää systemaattisena riskinä. Vastaavasti yrityksen johtavan asiantuntijan kuolema tai tärkeimmän alihankkijan konkurssi sekä yrityksen omistamalta maalta löydetty luonnonvaraesiintymä ovat esimerkkejä idiosynkraattisesta riskistä.

Teoreemassa 7.3 esiteltiin yksittäisten arvopaperien faktorihinnoitteluvirheelle 7.4 yläraja. Laajennetaan tätä johtamalla yläraja markkinoiden kaikkien arvopaperien virheiden neliöiden summalle. Edellyteksenä tälle on, että markkinoilla on määritelmän 7.8 mukainen faktoristruktuuri.

Teoreema 7.4. *Jos arvopapereiden tuotoilla on faktoristruktuuri, niin kaikkien arvopaperien faktorivirheiden neliöiden summalle pätee epäyhtälö*

$$\sum_{j=1}^{J} \psi_j^2 \leq \frac{1}{[\mathbb{E}(k_q)]^2} \max_j [\sigma^2(\epsilon_j)] \left|\left|k_q - k_q^{\mathcal{F}}\right|\right|^2. \tag{7.24}$$

Todistus. Voidaan olettaa, että kaikki ϵ_j ovat nollasta poikkeavia. Jos joku olisi nolla, niin tämä todistus pätisi kaikille arvopapereille, joilla on nollasta poikkeava ϵ_j. Yhtälön (7.17) mukaan arvopaperin, jonka idiosynkraattinen riski on nolla, hinnoitteluvirhe on myös nolla.

Hinnoitteluydin k_q sijaitsee arvopaperiavaruudessa $\mathcal{M}$, joka on avaruuden $\mathcal{F} + \text{span}\{\epsilon_1, ..., \epsilon_j\}$ aliavaruus. Koska residuaali η yhtälössä (7.18) on ortogonaalinen avaruuden $\mathcal{F}$ kanssa, niin sen täytyy sijaita avaruudessa $\text{span}\{\epsilon_1, ..., \epsilon_j\}$. Oletus faktoristruktuurista tarkoittaa, että idiosynkraattiset riskit ϵ_j ovat lineaarisesti itsenäisiä ja muodostavat siis avaruuden $\text{span}\{\epsilon_1, ..., \epsilon_j\}$ kannan. Tämä pätee Pythagoraan teoremaasta seuraavan korollaarin 3.1.1 perusteella. Edelleen termi η voidaan kirjoittaa muodossa

$$\eta = \sum_{j=1}^{J} a_j \epsilon_j, \tag{7.25}$$

joillekin skaalareille $a_1, ..., a_J$. Edellisen ja teoreeman 7.3 yhtälöiden (7.18) perusteella

$$\mathbb{E}(k_q \epsilon_j) = a_j \mathbb{E}(\epsilon_j^2). \tag{7.26}$$

Edelleen muokaten, käyttäen tietoa $\mathbb{E}(\epsilon_j^2) = \sigma^2(\epsilon_j)$ ja yhtälöä (7.17), saadaan

$$\psi_j = -\frac{1}{\mathbb{E}(k_q)} a_j \sigma^2(\epsilon_j). \tag{7.27}$$

Hyödyntäen uudestaan Pythagoraan teoreemaa saadaan

$$\sum_{j=1}^{J} a_j^2 \mathbb{E}(\epsilon_j^2) = ||\eta||^2. \tag{7.28}$$

Käyttäen yhtälöitä $\eta = k_q - k_q^{\mathcal{F}}$ ja $\mathbb{E}(\epsilon_j^2) = \sigma^2(\epsilon_j)$, voidaan edellinen yhtälö (7.28) kirjoittaa muodossa

$$\sum_{j=1}^{J} a_j^2 \sigma^2(\epsilon_j) = ||k_q - k_q^{\mathcal{F}}||^2. \tag{7.29}$$

Kerrotaan viimeistä yhtälöä vielä termillä $(1/[\mathbb{E}(k_q)]^2) \max_j \left[\sigma^2(\epsilon_j)\right]$ ja käytetään maksimaalifunktion ominaisuuksiin perustuvaa epäyhtälöä $\sigma^2(\epsilon_j) \leq \max_j[\sigma^2(\epsilon_j)]$, jolloin päädytään epäyhtälöön

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{1}{[\mathbb{E}(k_q)]^2} a_j^2 \sigma^4(\epsilon_j) \leq \frac{1}{[\mathbb{E}(k_q)]^2} \max_j \left[\sigma^2(\epsilon_j)\right] ||k_q - k_q^{\mathcal{F}}||^2. \tag{7.30}$$

Haluttu tulos seuraa yhtälöistä (7.27) ja (7.30). □

Teoreeman mukaan, jos näiden arvopaperien idiosynkraattiset riskit voidaan karakterisoida faktoristruktuurilla, niin tällöin kaikkilla paitsi äärellisellä määrällä arvopapereita on neliöity hinnoitteluvirhe, joka on mielivaltaisen pieni.

Teoreema vahvistaa aiemmin tehtyä toteamusta siitä, että jos hinnoitteluydin on lähellä faktoriavaruutta, niin faktorihinnoittelun virheet ovat pieniä. Lisäksi teoreemasta seuraa, että jos arvopapereiden lukumäärä markkinoilla on suuri, niin valta osa näiden hinnoitteluvirheistä on pieniä. Arvopapereiden hinnoittelun voi tulkita siis helpottuvan, kun arvopaperimarkkinoilla $\mathcal{E}$ olevien arvopapereiden lukumäärä N kasvaa. Hinnoitteluytimen sijainti ei siis vaikuta tähän tulkintaan. Katsotaan tätä vielä tarkemmin.

Esimerkki 7.4.1. *Olkoon $\rho > 0$ pieni numero ja olkoon N_ρ pienin kokonaisluku, joka on suurempi kuin M/ρ, missä M merkitsee teoreeman* 7.4 *yhtälön* (7.24) *oikeaa puolta. Jos $N > N_\rho$, niin ainakin $N - N_\rho$ arvopaperilla on neliöity hinnoitteluvirhe η_j^2, joka on pienempi kuin ρ. Muuten teoreeman yhtälö* (7.24) *ei pätisi.*

Edelleen, jos arvopaperien määrä N vielä vähennettynä termillä n_ρ on vieläkin suuri, niin silloin arvopaperien hinnoitteluvirheiden täytyy olla pieniä isolle osalle arvopapereista.

Tästä syystä puhutaankin joskus approksimatiivisesta faktorihinnoittelusta. Mainittakoon, että fundamentaalinen pohja arbirtraasihinnoittelulle saadaan kasvattamalla markkinoilla olevien arvopaperien lukumäärää rajatta.

Tarkasteellaan seuraavassa esimerkissä, miten faktoristruktuuria 7.8 voidaan hyödyntää sijoituskohteiden tuottoja tarkastellessa. Tämä tapahtuu simuloimalla.

Esimerkki 7.4.2. *Oletetaan, että käytössä on riittävän suuri määrä tilastollista dataa kattavaa simulointia varten. Tällä voisi tarkoittaa arvopapereiden historiatietoja ja tietoa isojen makromuuttujien kehityksestä pitkällä aikavälillä. Oletetaan lisäksi, että riittävä määrä prosessointitehoa on käytettävissä.*

Valitaan ensimmäisenä faktoristruktuurissa yksittäisten arvopaperien odotustuotot. Ne voidaan valita esimerkiksi pitkän aikavälin keskituoton, tai vaihtoehtoisesti sijoituskohteiden edustamien sektoreiden keskituottojen perusteella.

Toiseksi, mallinnetaan haluttu määrä faktoreita, joista faktoristruktuuri tullaan rakentamaan. Tässä on oleellista pyrkiä valitsemaan mallinnettavien sijoituskohteiden kannalta relevantteja faktoreita.

Kolmanneksi, aletaan mallintamaan faktoreiden ja sijoituskohteiden välisiä faktorikertoimia. Katsotaan, esimerkiksi, historiatiedoista, mikä on ollut inflaatioaste vuonna 2011 helmikuussa, ja tutkitaan miten käsiteltävä sijoituskohde on tuottanut seuraavan vuoden aikana ja mikä on ollut faktorin vaikutus tähän. Rajaamalla tarkastelu tällä tavalla, pysytään tässä työssä esitellyn kahden ajanhetken mallin puitteissa. Tutkittua riittävä määrä dataa, jonka jälkeen voidaan määritellä inflaatioasteen ja sijoituskohteiden väliset faktorikertoimet.

Tämän jälkeen, jatketaan mallintamalla seuraavan faktorin ja sijoituskohteiden väliset faktorikertoimet. Tätä prosessia toistetaan, niin kauan kunnes haluttu määrä faktoreita on mallinnettu, tai saavutetaan joku määritelty selittävyysaste. Täyttä tarkkuutta tuskin tullaan saavuttamaan ja jäljelle jäävä heilunta voidaankin selittää idiosynkraattisella riskillä ja residuaaleilla.

Viidentenä, päästään suorittamaan itse simulaatio. Valitaan riittävän suuri määrä skenaarioita, joka auttaa minimoimaan idiosynkraattisesta riskistä aiheutuvaa heiluntaa ja kattaa mahdolliset tulevaisuuden tilat. Tämä minimointi voidaan perustella Suurten lukujen lain avulla. Simuloidaan määritellyt faktorit näissä skenaarioissa, jonka jälkeen voidaan laskea faktorikertoimien perusteella sijoituskohteiden tuotot faktoristruktuurissa.

Näiden perusteella on mahdollista laskea sijoituskohteiden odotustuotot, varianssit ja muita tunnuslukuja, käyttäen skenaarioiden todennäköisyyksien painotusta. Edelleen, näitä simuloituja tuloksia voidaan hyödyntää CAP-mallissa ja portfolion rakentamisessa. Faktorikertoimien avulla voidaan määritellä sijoituskohteiden väliset varianssit. Luonnollisesti, tarvitaan lisäoletukset, joiden perusteella CAP-malli on voimassa.

8 Johtopäätokset

Luvun 6 CAP-mallissa beta-kertoimella mitattiin sijoituskohteen tuoton ja markkinatuoton välistä suhdetta. Vaatimuksina tälle olivat kaikkien toimijoiden odotusarvohakuiset preferenssit ja markkinoiden tasapaino. Nämä preferenssit karakterisoi utiliteettifunktioiden riippuvuus ainoastaan odotusarvosta ja varianssista. Toimijat siis mittasivat riskiään pelkästään varianssin avulla. Kappaleessa 7.3 kuitenkin pystyttiin esittämään sijoituskohteisiin liittyvä riski faktoristruktuurin avulla sekä systemaattisena että idiosynkraattisena riskinä. Systemaattinen riski pystyttiin vieläpä jakamaan yksittäisille faktoreille. Lienee selvää, että riskin mittaaminen faktoreiden ja residuaalien avulla on siis sovelluksissa mielekkäämpää ja tarkempaa kuin CAP-mallissa. CAP-malli kuvaa siis riskiä pelkästään betan avulla ja tulkitsee kaiken riskin olevan systemaattista. Ainakin CAP-mallia voi pitää liian yksinkertaisena kuvaamaan tarkasti reaalimarkkinoita. Mainitaan kuitenkin faktorimallin käytön raskaus. Yksi mahdollisuus tämän hallintaan on käyttää suurta määrää yksittäisiä faktoreita ja tarkastella, mitä nämä yksittäiset faktorit sanovat keskimäärin.

Käytännössä molemmat mallit, CAP- ja faktorimalli, vaativat oletuksia tai tietoa tulevaisuudesta, mikä ei itsessään ole varmaa. Näitä ovat esimerkiksi oletukset sijoituskohteiden tuotoista tulevaisuudessa, faktoreiden normalisoiminen jollakin odotusarvolla ja yksittäisiin arvopapereihin liittyvä idiosynkraattinen riski tai sopivan residuaalin valinta. Tämän lisäksi nämä todennäköisesti muuttuvat kaikki ajan kanssa ja kannattaisi mallintaa stokastisina prosesseina. Tämäkin lisää mallien kompleksisuutta.

Viime vuosina valtioiden velkakirjojen korkokäyrät ovat paikoin olleet negatiivisia ensimmäisille kymmenelle vuodelle. Näitä korkokäyriä voi tarkastella esimerkiksi osoitteesta www.investing.com/rates-bonds [4]. Näitä velkakirjoja on perinteisesti pidetty edustajina riskittömälle tuotolle. Ainakin Yhdysvalloissa on eläkerahastoja, joilta odotetaan tietyn tasoista vuotuista tuottoa. Tällöin, mitä alempana velkakirjojen vuosikorot ovat keskimäärin, niin sen riskillisempiä portfolioita nämä merkittävän kokoiset toimijat joutuvat muodostamaan. Jos riskitön tuotto on negatiivinen, niin oletus kaikkien toimijoiden riskinkaihtavuudesta ei siis ole mielekäs. Muutkin toimijat käyttävät kyseisiä riskittömän tuoton instrumentteja myös usein likviditeettivaatimustensa täyttämiseen. Nämä vaatimukset ovat myös yksi asia, mitä mallit eivät ota huomioon.

Systemaattisesta riskistä puhuttaessa CAP-mallin soveltamisessa on lisähuomion arvoista arvopapereiden käyttäytyminen katastrofitilanteissa. Tällä tarkoitetaan skenaarioita, joissa kaikki portfolion tai markkinoiden arvopaperit tekevät massiivisia tappiota, vaikkakin itse skenaariot ovat epätodennäköisiä. Näiden skenaarioiden näkyvyys odotusarvoissa ja variansseissa ovat vähäisiä, mutta reaalimaailman implikaatiot ovat toimijoiden kannalta hyvin epämiellyttäviä. Nämä skenaariot voidaan kuvata paremmin faktoreiden avulla. Tällaisen riskin olemassa olo on itsessään ristiriita sen kanssa, että olisi mahdollista rakentaa täysin puhtaasti hajautettu portfolio. Ongelmaa voidaan kuvata yksinkertaistaen toteamalla, että arvopapereiden välinen korrelaatio lähestyy kohti ykköstä katastrofitilanteissa lähes kaikkien sijoituskohteiden välillä. Samasta syystä korrelaatio ei välttämättä ole realistinen kuvatessa sijoituskohteiden välisiä riippuvuuksia, eikä ainakaan katastrofitilanteita mallinnettaessa.

9 Kirjallisuutta

[1] Leroy, Stephen; Werner, Jan: Principles of Financial Economics, University of Cambridge, 2001.
[2] Nyrhinen, Harri: Sijoitustoiminnan matematiikka, luentomuistiinpanot, University of Helsinki, 2017.
[3] Astala, Kari: Funktionaalianalyysin peruskurssi, luentomuistiinpanot, University of Helsinki, 2012.
[4] www.investing.com/rates-bonds